

The background of the cover features a horizontal laser tube with a red glow. A bright blue laser beam originates from the left side of the tube and extends towards the top left corner. The overall background is a dark, textured blue-green.

Introducere în fizica sistemelor LASER

Valentin POHOAȚĂ

Editura **Stef**

Iași - 2020

Introducere în fizica sistemelor LASER

Valentin Pohoată

Editura **Stef**

Iași – 2020

Editura și tipografia **STEF**®

Editură recunoscută C.N.C.S.I.S. Cod 88

700705, IAȘI, Bulevardul Carol I nr. 8, parter

Telefon: 0232 216 829

Mobil: 0745 236 413

E-mail: office@editurastef.ro

Website: www.editurastef.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

POHOAȚĂ, VALENTIN

Introducere în fizica sistemelor laser / Valentin Pohoăță. - Iași :

Stef, 2020

Conține bibliografie

ISBN 978-606-028-337-9

53

Introducere în fizica sistemelor LASER

Valentin Pohoată

Suport de curs adresat studenților

Referenți Științifici:

Dr. Cătălin Agheorghiesei

Dr. Ilarion Mihăilă

ISBN 978-606-028-337-9

Material cu drept de proprietate intelectuală si Editat de autor

– Valentin Pohoată –

Adapted Standard Book L^AT_EX Template, edited with [Overleaf](#)

This work is licensed under a

Creative Commons

Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.



Cuprins

1	Modelul Lorentz	1
1.1	Presupunerile modelului dipolului electric	1
1.2	Perturbarea momentană a dipolului electric	2
1.2.1	Structura spectrală a câmpului electromagnetic emis de dipol	4
1.3	Perturbarea continuă a dipolului electric	6
1.3.1	Energia absorbită de dipol	8
1.3.2	Perturbarea continuă a unui ansamblu de dipoli electrici	10
1.4	Valoarea teoretică a coeficientului de amortizare radiativă . .	12
1.4.1	Domeniul de aplicabilitate a modelului Lorentz . . .	14
1.5	Câmp electromagnetic de scurtă durată	15
1.6	Structura spectrală a câmpului emis de dipol. Rezumat	18
2	Mecanisme de influențare a spectrelor	21
2.1	Influența presiunii cinetice – lărgire Lorentz	21
2.2	Influența temperaturii – lărgire Doppler	24
2.3	Mecanisme de lărgire omogenă și neomogenă	27
2.4	Influența vitezei de drift – deplasare Doppler	28
2.4.1	Deplasarea Doppler – domeniul relativist	30
2.4.2	Deplasarea spre roșu - expansiunea Universului . .	32

3	Sisteme cuantice	35
3.1	Niveluri energetice și lărgimea energetică a acestora	35
3.2	Probabilități de tranziție	38
3.2.1	Emisia spontană (naturală)	38
3.2.2	Fenomene forțate: absorbția și emisia stimulată . . .	38
3.3	Timpul de viață	40
3.4	Interacțiunea radiațiilor optice cu sistemele cuantice	43
3.5	Inversia populației	47
3.5.1	Schema cu trei niveluri energetice	47
3.5.2	Schema cu patru niveluri energetice	50
4	Rezonatorul optic	53
4.1	Ecuția Helmholtz a fasciculelor paraxiale	54
4.1.1	Unda plană – soluție a ecuației Helmholtz	55
4.1.2	Unda sferică – soluție a ecuației Helmholtz	56
4.1.3	Unda complexă – soluție a ecuației Helmholtz	57
4.1.4	Fascicul gaussian-sferic	58
4.1.5	Caracteristicile modului fundamental Gauss	64
4.1.6	Focalizarea fasciculelor gaussian-sferice	69
4.2	Rezonatorul optic cu două oglinzi	71
4.2.1	Diagrama de stabilitate a rezonatorului optic	73
4.2.2	Rezonator optic simetric	74
4.2.3	Rezonator optic semi-simetric	77
4.3	Frecvența modurilor de oscilație	79
4.4	Rezonatorul Fabry-Perot	81
4.4.1	Interpretarea grafică a factorului de transfer	85
4.4.2	Mărimi specifice rezonatorului Fabry-Perot	91
4.5	Rezonatorul acordabil Littrow	95
4.5.1	Rețeaua de difracție	96

4.5.2	Configurația Littrow	99
4.5.3	Cavitatea laser extinsă. Laser acordabil cu diodă. . .	100
5	Tipuri de sisteme laser	105
5.1	Laserul cu He-Ne	105
5.2	Laserul cu rubin	109
5.3	Laserul Nd-YAG	114
5.4	Laserul cu CO ₂	117
5.5	Laserul cu excimeri	121
Bibliografie		127
	Surse On-Line	127
	Articole	128
	Cărți	129

Capitolul 1

Modelul Lorentz

1.1 Presupunerile modelului dipolului electric

În ciuda faptului că acest model este pur clasic, încă este considerat util și actual. Lorentz propune ca interacțiunea dintre nucleu și electron să fie echivalentă unui sistem mecanic compus din două sfere, legate printr-un resort elastic. Presupunerile modelului:

- masa electronului este foarte mică în raport cu cea a nucleului astfel încât nucleul stă fix (centrul sistemului de coordonate);
- amplitudinea de oscilație (alungire și comprimare) a resortului este mică, mișcarea de oscilație este simetrică și rectilinie (aproximație liniară);
- forța de interacțiune dintre electron - nucleu este una de tip elastic descrisă de legea lui Hooke;

$$F_{Lorentz} = -Kx \quad (1.1)$$

- mișcarea este guvernată de legea a doua a lui Newton;

$$F_{total} = m_e \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.2)$$

H. A. Lorentz și
P. Zeeman obțin
Premiul Nobel
pentru Fizică
în 1902 pentru

explicarea despicării
liniilor spectrale în
prezența câmpului
magnetic.

Isaac Newton
(1643 - 1727)

În starea staționară electronul se află la o anumită distanță x_0 față de nucleu. Dacă sistemul este perturbat, electronul oscilează liniar (în lungul axei Ox) simetric față de poziția de echilibru x_0 , astfel încât, la un moment oarecare de timp t se află la poziția $x(t)$. Din punct de vedere electrostatic, această mișcare mecanică este echivalentă cu o separare oscilatorie a sarcinilor electrice de semn opus iar măsura separării este descrisă de momentul de dipol electric $p(t) \stackrel{def.}{=} ex(t)$ unde e este sarcina electronului. Există două modele consacrate de perturbare a dipolului electric:

- pentru un moment foarte scurt de timp scot electronul din starea staționară și urmăresc evoluția dipolului după ce factorul perturbator a încetat;
- asupra electronului acționează în mod continuu factorul extern perturbator.

1.2 Perturbarea momentană a dipolului electric

La momentul $t_0 = 0$ factorul perturbator extern a încetat iar la un moment de timp ulterior t , mă aștept ca electronul să revină la starea staționară printr-o mișcare oscilatorie în jurul poziției x_0 . Ca în final electronul să se oprească trebui ca asupra lui să acționeze o forță internă de frecare ce întotdeauna este proporțională cu viteza

De ce cu minus?

$$F_{radiativa} = -\eta \frac{dx}{dt} \quad (1.3)$$

unde η este coeficientul de frecare internă iar ecuația de mișcare a electronului este de forma

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} = -\eta \frac{dx}{dt} - kx \quad (1.4)$$

Ținând cont de faptul că $p(t) = ex(t)$ și notez

$$\gamma_0 = \frac{\eta}{m_e}; \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m_e}}; \quad (1.5)$$

ecuația de mișcare a electronului se transformă în ecuația de evoluție a momentului de dipol electric:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} + \gamma_0 \frac{dp(t)}{dt} + \omega_0^2 p(t) = 0 \quad (1.6)$$

unde ω_0 este pulsația de rezonanță proprie dipolului numită și pulsație naturală sau fundamentală iar γ_0 se numește coeficient de amortizare radiativă.

Ne așteptăm la o variație a momentului de dipol periodică și amortizată.

Pentru ecuația diferențială omogenă, de ordinul al doilea, propun ca soluția momentului de dipol să fie exprimată printr-o integrală Fourier (o sumă continuă de funcții armonice cu fază aleatoare):

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.7)$$

Introducem soluția propusă în ecuația diferențială și obținem identitatea

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\omega^2 + i\omega\gamma_0 + \omega_0^2) p(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 0 \quad (1.8)$$

cu ecuația caracteristică de ordin doi

$$\omega^2 - i\omega\gamma_0 - \omega_0^2 = 0 \quad (1.9)$$

De ce egalez cu zero?

a cărei soluții sunt:

$$\omega = i\frac{\gamma_0}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2} \quad (1.10)$$

Oscilatorul optic are un factor de calitate mare, cu amortizare lentă astfel încât putem considera $\gamma_0 \ll \omega_0$ și în această aproximație, soluția ecuației caracteristice devine:

$$\omega \approx i\frac{\gamma_0}{2} + \omega_0 \quad (1.11)$$

Dar soluția cu minus?

Acest rezultat introdus în soluția de tip Fourier propusă, conduce la:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega) e^{i\omega t} d\omega = e^{-\frac{\gamma_0}{2}t} e^{i\omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega) d\omega \quad (1.12)$$

Integrala tuturor amplitudinilor individuale $p(\omega)$ caracteristice tuturor funcțiilor armonice Fourier o notăm cu \tilde{p}_0 (fazor) iar soluția evoluției momentului de dipol electric devine:

$$p(t) = \tilde{p}_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t} e^{i\omega_0 t} \quad (1.13)$$

cu reprezentarea sa grafică în Figura 1.1. Inițial, $p(t = 0) = \tilde{p}_0$ iar după

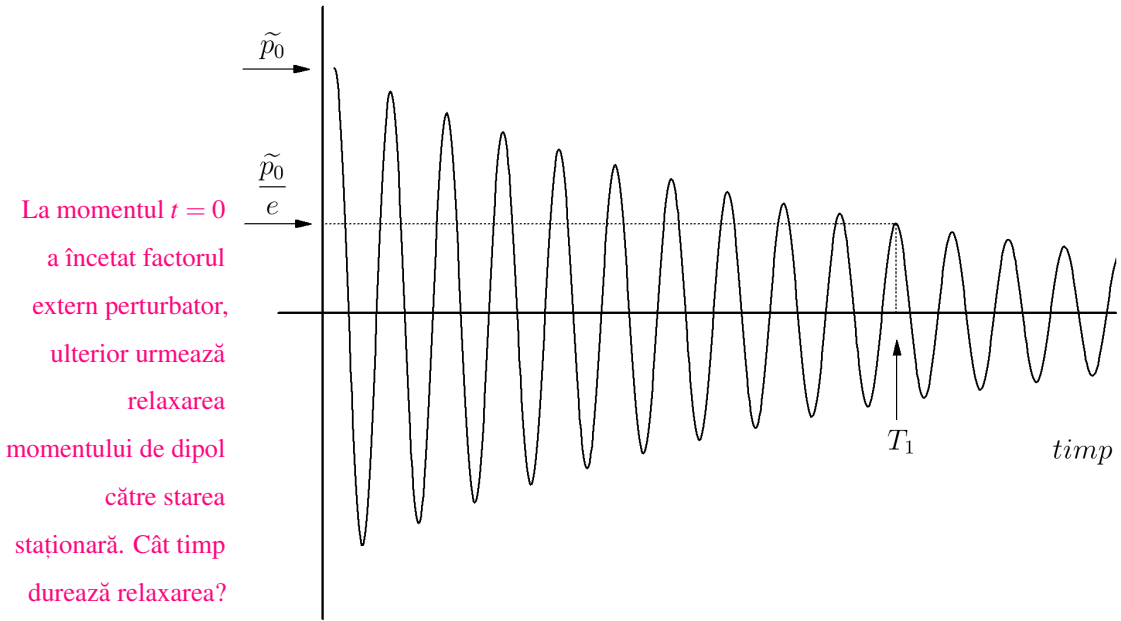


Figura 1.1: Amortizarea momentului de dipol

timpul T_1 amplitudinea scade de e ori și $p(t = T_1) = \frac{\tilde{p}_0}{e}$. Introducând aceste condiții în ecuația evoluției momentului de dipol obținem valoarea timpului de relaxare:

De cine depinde
valoarea lui η ?

$$T_1 = \frac{2}{\gamma_0} = \frac{2m_e}{\eta} \quad (1.14)$$

unde η este coeficientul de frecare internă.

1.2.1 Structura spectrală a câmpului electromagnetic emis de dipol

Presupunem că dipolul electric este perturbat pentru o durată de timp foarte scurtă și prin oscilații liber amortizate, tinde la starea staționară. Pe durata oscilației dipolului electric, se emite câmp electric doar dacă derivata de ordin doi a momentului de dipol electric în raport cu timpul este diferită de zero. Intensitatea câmpului electric emis de dipol, măsurată perpendicular pe direcția de oscilație a dipolului la distanța R indică același comportament

de amortizare exponențială a amplitudinii de oscilație.

$$e(R, t) = \begin{cases} \widetilde{E}_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t} e^{i(\omega_0 t - K_0 R)} & \text{pentru } t \geq 0 \\ 0 & \text{pentru } t < 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

unde \widetilde{E}_0 se numește fazor și conține informații despre amplitudine și fază.

Adoptăm aceeași tehnică Fourier și presupunem că structura câmpului emis, oricât de complicată ar fi, poate fi descrisă de o sumă continuă de componente armonice, de pulsație ω . Amplitudinea funcției armonice ω este de forma:

$$\widetilde{E}(\omega) = \widetilde{E}_0 \int_0^\infty e^{-\frac{\gamma_0}{2}t} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt \quad (1.16)$$

De ce integrăm de la 0 la ∞ ?

și evaluând integrala obținem:

$$\widetilde{E}(\omega) = \frac{\widetilde{E}_0}{-\left[\frac{\gamma_0}{2} + i(\omega - \omega_0)\right]} e^{-\left[\frac{\gamma_0}{2} + i(\omega - \omega_0)\right]t} \Big|_0^\infty = \frac{\widetilde{E}_0}{\frac{\gamma_0}{2} + i(\omega - \omega_0)} \quad (1.17)$$

Densitatea de flux spectrală se obține prin medierea vectorului Poynting pe un interval de timp ce poate fi egal cu timpul de relaxare T_1 a oscilațiilor dipolului electric:

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{T_1} \frac{|\widetilde{E}(\omega)|^2}{c\mu_0} = \frac{1}{T_1} \frac{|\widetilde{E}_0(\omega)|^2}{c\mu_0} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma_0/2)^2} \quad (1.18)$$

Ținând cont de expresia lui T_1 , densitatea de flux emisă de dipolul liber amortizat are expresia

$$\varphi(\omega) = \frac{|\widetilde{E}_0(\omega)|^2}{c\mu_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2} \quad (1.19)$$

și este reprezentată grafic în Figura 1.2.

Mărimea des utilizată și specifică oricărui profil de emisie, este semi-lărgimea profilului definită ca:

$$\Delta\omega_L = \omega_2 - \omega_1 \text{ unde } \omega_1 \text{ și } \omega_2 \text{ satisfac } \varphi(\omega_1) = \varphi(\omega_2) = \frac{\varphi(\omega_0)}{2} \quad (1.20)$$

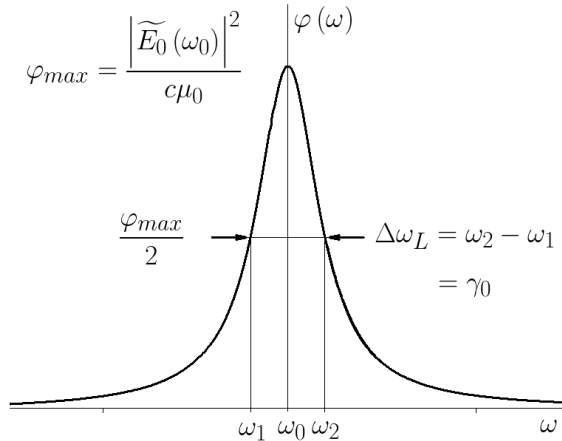


Figura 1.2: Profil Lorentz de emisie cu semi-lărgimea $\Delta\omega_L = \gamma_0$

Introducând această condiție în expresia $\varphi(\omega)$ se obține valoarea semi-lărgimii profilului Lorentz de emisie:

Semi-lărgime (1.21)

$$\Delta\omega_L = \gamma_0$$

Lorentz

sau naturală. unde γ_0 este coeficientul de amortizare radiativă.

1.3 Perturbarea continuă a dipolului electric

Presupunem că din exterior acționează în mod continuu un câmp electric extern de pulsație ω apropiată de valoarea ω_0 –pulsația proprie a dipolului. În acest mod, asupra dipolului acționează o forță motrice de ”târâire” ce face ca dipolul să urmărească pulsația câmpului extern și acest cuplaj are eficiență maximă la rezonanță atunci când $\omega \approx \omega_0$. Proiecția intensității câmpul electric extern pe direcția momentului de dipol este de forma:

Formula lui Euler (1.22)

$$e_p(\omega, t) = \Re e \left[\widetilde{E}(\omega) e^{i\omega t} \right] = \frac{1}{2} \left[\widetilde{E}(\omega) e^{i\omega t} + \widetilde{E}^*(\omega) e^{-i\omega t} \right]$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

unde $\widetilde{E}(\omega) = E(\omega) e^{i\varphi}$ este fazorul undei și conține informații despre valoarea amplitudinii cât și a fazei. Evoluția momentului de dipol electric în

prezența câmpului electric extern

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} + \gamma_0 \frac{dp(t)}{dt} + \omega_0^2 p(t) = \frac{e^2}{m_e} e_p(\omega, t) \quad (1.23)$$

este descrisă de o ecuație diferențială neomogenă, de ordinul al doilea. Mă aștept ca dipolul să urmărească liniar câmpul extern și propun drept soluție a momentului de dipol:

$$p(t) = \Re e [\tilde{p}(\omega) e^{i\omega t}] \quad (1.24)$$

cu valori independente de timp ale fazorului $\tilde{p}(\omega)$ ce conține informații despre amplitudine și defazajul dintre câmpul extern și oscilațiile dipolului (dipolul rămâne în urma câmpului). Introducem soluția propusă în ecuația diferențială de ordinul al doilea și ținând cont de definiția polarizabilității dipolului în aproximația liniară

$$(-\omega^2 + i\omega\gamma_0 + \omega_0^2) \tilde{p}(\omega) e^{i\omega t} = \frac{e^2}{m_e} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} \quad (1.25)$$

Ce este polarizabilitatea?

$$\tilde{p}(\omega) \stackrel{def.}{=} \tilde{\alpha}(\omega) \tilde{E}(\omega) \quad (1.26)$$

Dar în aproximația neliniară?

prin identificarea termenilor obținem polarizabilitatea sistemului considerat:

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \frac{\frac{e^2}{m_e}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma_0\omega} \quad (1.27)$$

care în apropierea rezonanței și a aproximațiilor

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \approx 1 \quad \text{și} \quad (\omega_0^2 - \omega^2) = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega) \quad (1.28)$$

devine:

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) + i\gamma_0\omega} \quad (1.29)$$

În acest caz, polarizabilitatea este o mărime complexă,

$$\tilde{\alpha}(\omega) \stackrel{not.}{=} \alpha_r(\omega) + i\alpha_i(\omega) \quad (1.30)$$

și prin identificarea termenilor real și imaginar se obține:

$$\alpha_r(\omega) = -\frac{e^2}{m_e \gamma_0 \omega_0} \frac{\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2} \quad (1.31)$$

$$\alpha_i(\omega) = -\frac{e^2}{m_e \gamma_0 \omega_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2} \quad (1.32)$$

La rezonanța $\omega = \omega_0$, cele două componente ale polarizabilității, reală și imaginară, sunt:

$$\alpha_r(\omega_0) = 0 \quad (1.33)$$

$$\alpha_i(\omega_0) = -\frac{e^2}{m_e \gamma_0 \omega_0} \quad (1.34)$$

1.3.1 Energia absorbită de dipol

Ne interesează să calculăm puterea medie preluată de la câmpul extern și transferată dipolului pe un interval de timp egal cu o perioadă. Expresia generală a puterii este de forma:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) F(t) dt \quad (1.35)$$

unde $\dot{x}(t)$ este viteza iar $F(t)$ este forța electrică ce acționează asupra dipolului. Analog expresiei proiecția intensității câmpul electric extern pe direcția momentului de dipol, vectorul de poziție se scrie sub forma:

$$x(\omega, t) = \Re e [\tilde{x}(\omega) e^{i\omega t}] = \frac{1}{2} [\tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} + \tilde{x}^*(\omega) e^{-i\omega t}] \quad (1.36)$$

care derivată în raport cu timpul și introdusă în expresia puterii conduce la:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [i\omega \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} - i\omega \tilde{x}^*(\omega) e^{-i\omega t}] \frac{e}{2} [\tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} + \tilde{E}^*(\omega) e^{-i\omega t}] dt \quad (1.37)$$

Folosind expresiile $p(t) \stackrel{def.}{=} ex(t)$ și $\tilde{p}(\omega) \stackrel{def.}{=} \tilde{\alpha}(\omega) \tilde{E}(\omega)$ integrala puterii devine:

$$\langle P \rangle = \frac{i\omega}{4} \left[\tilde{\alpha}(\omega) \left| \tilde{E}(\omega) \right|^2 - \tilde{\alpha}^*(\omega) \left| \tilde{E}^*(\omega) \right|^2 \right] \quad (1.38)$$

și introducând partea reală și respectiv imaginară a polarizabilității

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \frac{i\omega}{4} \left| \tilde{E}(\omega) \right|^2 [\alpha_r(\omega) + i\alpha_i(\omega) - \alpha_r(\omega) + i\alpha_i(\omega)] \\ &= -\frac{\omega}{2} \alpha_i(\omega) \left| \tilde{E}(\omega) \right|^2\end{aligned}\quad (1.39)$$

Rezultatele așteptate sunt acelea că puterea medie absorbită este proporțională cu pătratul amplitudinii câmpului extern și nu depinde de partea reală a polarizabilității. În același timp puterea absorbită este descrisă de o funcție continuă, liniară cu pătratul amplitudinii, fără limită superioară, necuantificată. Introducând expresia părții imaginare a polarizabilității, în aproximația $\omega/\omega_0 \approx 1$

Limitarea modelului
clasic de absorbție a
luminii.

$$\langle P \rangle = \frac{\pi e^2}{4m_e} \frac{2}{\pi\gamma_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2} \left| \tilde{E}(\omega) \right|^2 \quad (1.40)$$

cu

$$g_L(\omega, \omega_0) \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{2}{\pi\gamma_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2} \quad \text{și} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_L(\omega, \omega_0) d\omega = 1 \quad (1.41)$$

Profil Lorentz
sau profil natural.

unde $g_L(\omega, \omega_0)$ se numește contur Lorentz - contur spectral de absorbție în acest caz. Specific acestui contur, reprezentat grafic în Figura 1.3, pentru valori mult diferite ale pulsației câmpului extern ω față de pulsația proprie dipolului ω_0 , conturul tinde asimptotic la zero iar semi-lărgimea profilului se definește ca $\Delta\omega_L = \omega_2 - \omega_1$, unde ω_1 și ω_2 satisfac identitatea:

$$g_L(\omega_1, \omega_0) = g_L(\omega_2, \omega_0) = \frac{g_L(\omega_0)}{2} \quad (1.42)$$

Introducând această condiție în expresia $g_L(\omega, \omega_0)$ se obține valoarea semi-lărgimii profilului Lorentz.

Observația 1.1. *Semi-lărgimea Lorentz naturală este:*

$$\Delta\omega_L = \gamma_0 \stackrel{\text{not.}}{=} FWHM(\text{Full width at half maximum}) \quad (1.43)$$

unde $\gamma_0 = 2/T_1$ și depinde de coeficientul de frecare internă η .

Dipolul absoarbe la orice frecvență a câmpului extern?

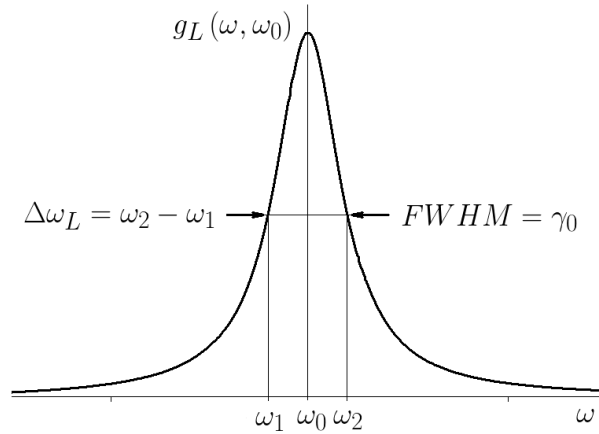


Figura 1.3: Profil Lorentz de absorbție cu semi-lărgimea $\Delta\omega_L = \gamma_0$

Dacă nu ar exista frecare internă, dipolul ar oscila neamortizat (pur armonic) atunci $T_1 \rightarrow \infty$ iar $FWHM \rightarrow 0$ iar forma profilului de absorbție ar fi de tip Dirac.

Definiți
profilul Dirac.

1.3.2 Perturbarea continuă a unui ansamblu de dipoli electrici

Considerăm că în unitatea de volum sunt n_V dipoli identici, ce nu interacționează între ei iar asupra ansamblului de dipoli acționează din exterior un câmp electric de frecvență ω , în apropierea rezonanței. Polarizabilitatea mediului (densitatea de polarizare) se obține ca sumă a polarizabilităților individuale ale dipolilor identici:

$$\tilde{P} = n_V \tilde{p}(\omega) = n_V \tilde{\alpha}(\omega) \tilde{E}(\omega) = \epsilon_0 \tilde{\chi}(\omega) \tilde{E}(\omega) \quad (1.44)$$

unde ϵ_0 este permitivitatea electrică a vidului iar $\tilde{\chi}(\omega)$ este susceptibilitatea electrică a mediului considerat. Într-un mediu dielectric, câmpul electric

indus în material este descris prin vectorul inducție electrică sau deplasare:

$$\tilde{D}(\omega) = \epsilon_0 (1 + \tilde{\chi}(\omega)) \tilde{E}(\omega) = \epsilon_0 \tilde{\epsilon}_r(\omega) \tilde{E}(\omega) \quad (1.45)$$

unde $\tilde{\epsilon}_r(\omega)$ este permitivitatea electrică relativă. Din ultimele două relații, obținem:

$$\tilde{\epsilon}_r(\omega) = 1 + \tilde{\chi}(\omega) = 1 + \frac{n_V \tilde{\alpha}(\omega)}{\epsilon_0} \quad (1.46)$$

Folosind expresia polarizabilității dipolului individual obținută anterior, expresia permitivității electrice a materialului devine:

$$\tilde{\epsilon}_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) + i\gamma_0\omega} \stackrel{not.}{=} \epsilon_r(\omega) + i\epsilon_i(\omega) \quad (1.47)$$

unde

$$\omega_p^2 \stackrel{not.}{=} \frac{n_V e^2}{m_e \epsilon_0} \quad (1.48)$$

Prin identificarea termenilor real și imaginar se obține:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2 (2\omega_0(\omega_0 - \omega))}{(2\omega_0(\omega_0 - \omega))^2 + \gamma_0^2 \omega^2} \quad (1.49)$$

$$\epsilon_i(\omega) = \frac{\omega_p^2 \gamma_0 \omega}{(2\omega_0(\omega_0 - \omega))^2 + \gamma_0^2 \omega^2} \quad (1.50)$$

Partea reală a permitivității electrice relative este legată de fenomenul de propagare a undei electromagnetice în material în timp ce partea imaginară este corelată cu fenomenul de absorbție. La rezonanță $\omega = \omega_0$ cele două componente ale permitivității electrice, reală și imaginară, cu reprezentarea grafică în Figura 1.4, devin:

$$\epsilon_r(\omega) - 1 = 0 \quad (1.51)$$

$$\epsilon_i(\omega) \xrightarrow{max} \frac{\omega_p^2}{\gamma_0 \omega} \quad (1.52)$$

La rezonanță,
permitivitatea
mediului este egală
cu cea a vidului?

Ce semnificație are
partea reală
dar negativă a
permitivității
electrice?

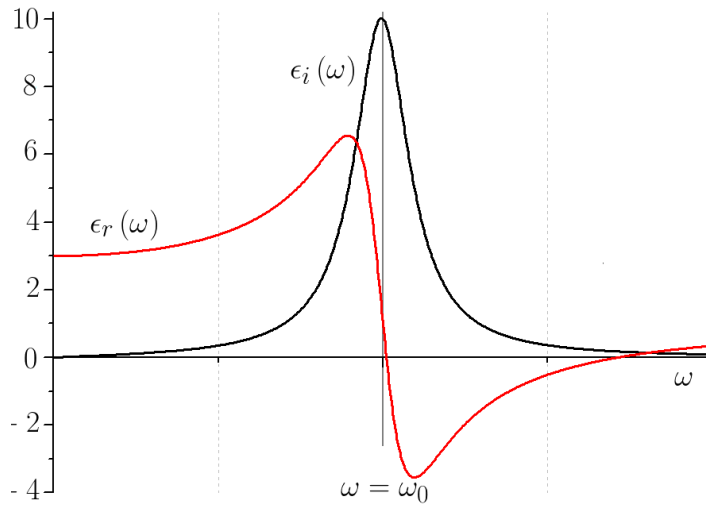


Figura 1.4: Permitivitatea electrică în vecinătatea rezonanței. Partea imaginară a permitivității este descrisă de un profil Lorentz cu semi-lărgimea $\Delta\omega_L = \gamma_0$

De ce?

Observația 1.2. De remarcat este faptul că, profilul părții imagine a permitivității electrice relative a materialului, rămâne tot de tip Lorentz, ca și cum întregul ansamblu de dipoli n_V se comportă ca un singur dipol. Mai mult, valoarea semi-lărgimii profilului permitivității imagine rămâne neschimbată și egală cu γ_0 .

1.4 Valoarea teoretică a coeficientului de amortizare radiativă

Ce înseamnă liber?

Chiar dacă dipolul este liber, puterea radiată de dipol duce la micșorarea energiei interne, adică execută o mișcare oscilatorie amortizată. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare radiativă într-un interval de timp Δt trebuie să fie egal cu energia totală radiată de către dipol în același interval de timp, considerată cu semnul (-).

$$\int_0^{\Delta t} F_{rad} v dt = - \int_0^{\Delta t} P_{inst.tot} dt \quad (1.53)$$

unde $P_{inst.tot}$ este puterea instantanee totală radiată. Valoarea instantanee a vectorului Poynting într-un punct situat la distanța \vec{R} față de dipol este:

$$\vec{S}(t) = \frac{1}{c\mu_0} e^2(t) \vec{S}_0 = \frac{\sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \left[\frac{d^2 p(t)}{dt^2} \right]^2 \vec{S}_0 \quad (1.54)$$

Puterea instantanee totală radiată se obține prin integrarea puterii instantanee pe o sferă de rază R , sferă ce înconjoară dipolul:

$$\begin{aligned} P_{inst.tot} &= \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \left[\frac{d^2 p(t)}{dt^2} \right]^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R^2 \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left[\frac{d^2 p(t)}{dt^2} \right]^2 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Pentru ușurarea calculului, evaluăm $P_{inst.tot}$ pe un interval de timp foarte scurt astfel încât în intervalul dt , amplitudinea de oscilație a dipolului liber amortizat este constantă. Cu alte cuvinte, în intervalul dt , variația exponențialei $e^{-\frac{\gamma_0}{2}t}$ o considerăm neglijabilă și dipolul oscilează armonic:

$$p(t) = \tilde{p}_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t} e^{i\omega_0 t} \text{ care pentru } dt \text{ mic devine } p(t) = \tilde{p}_0 \cos \omega_0 t \quad (1.56)$$

Dacă ținem seama și de definiția momentului de dipol atunci

$$p(t) = ex_0 \cos \omega_0 t \text{ cu derivata a doua } \ddot{p}(t) = -\omega_0^2 p(t) \quad (1.57)$$

Astfel, puterea instantanee totală radiată devine:

$$P_{inst.tot} = \frac{\omega_0^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} [p(t)]^2 = \frac{\omega_0^4 e^2 x_0^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \cos^2 \omega_0 t \quad (1.58)$$

Folosind expresia vitezei în artificio de calcul

$$v(t) = v_0 \sin \omega_0 t = \omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$$

$$\dot{v}(t) = \omega_0^2 x_0 \cos \omega_0 t \quad (1.59)$$

$$\ddot{v}(t) = -\omega_0^3 x_0 \sin \omega_0 t = -\omega_0^2 v(t) \quad (1.60)$$

$$[\dot{v}(t)]^2 = \omega_0^4 x_0^2 \cos^2 \omega_0 t$$

expresia puterii instantanee totale devine:

$$P_{inst.tot} = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} [\dot{v}(t)]^2 \quad (1.61)$$

care înlocuiește în condiția conservării energiei, obținem:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\Delta t} F_{rad} v dt &= - \int_0^{\Delta t} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} [\dot{v}(t)]^2 dt \\
 &= - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[\underbrace{\dot{v}(t)v(t) \Big|_0^{\Delta t}}_{=0 \text{ funcție periodică}} - \int_0^{\Delta t} \ddot{v}(t)v(t) dt \right] \quad (1.62) \\
 &= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^{\Delta t} \ddot{v}(t)v(t) dt
 \end{aligned}$$

și trecând totul într-un singur membru:

$$\int_0^{\Delta t} \left[F_{rad} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{v}(t) \right] v dt = 0 \quad (1.63)$$

Egalitatea cu zero trebuie îndeplinită pentru conservarea energiei astfel încât expresia forței radiative devine:

$$\text{De ce?} \quad F_{rad} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{v}(t) = - \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} v(t) \stackrel{\text{atribuire}}{=} -\gamma_0 m_e v(t) \quad (1.64)$$

Prin identificarea termenilor se obține expresia coeficientului de amortizare radiativă:

$$\gamma_0 = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e} \quad (1.65)$$

ce depinde de ω_0 – pulsația de rezonanță proprie dipolului electric.

1.4.1 Domeniul de aplicabilitate a modelului Lorentz

Indiferent dacă analizăm fenomenele de emisie sau absorbție referitoare

Important! la un singur dipol sau chiar mai mult, la un ansamblu de dipoli liberi, profilul **Spectrul de emisie este identic cu cel de absorbție** (profil Lorentz). Acestui profil îi corespunde semi-lărgimea naturală dată de expresia lui γ_0 (coeficientului de amortizare radiativă) și datorită faptului că am presupus ca dipolii sunt liberi, $\Delta\omega_L$ reprezintă valoarea minimă a unui contur spectral. Ținând cont de relațiile

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0\Delta\omega_L = 2\pi\Delta\nu_L\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \quad (1.66)$$

și de faptul că γ_0 are dimensiunea unei pulsații, expresia semi-lărgimii naturale exprimată în unități de frecvență este descrisă de relația:

$$\Delta\nu_L = \frac{e^2}{3\varepsilon_0 c m_e} \frac{1}{\lambda_0^2} \quad (1.67)$$

Exemplu 1.1 (Semi-lărgimea naturală ≈ 10 MHz).

$$\lambda_0 = 600 \text{ nm} - \text{domeniul vizibil}, \Delta\nu_L \approx 10 \text{ MHz} \quad (1.68) \quad \text{Important!}$$

Conform expresiei $\Delta\nu_L$, pentru domeniul microunde, valoarea semi-lărgimii naturale scade considerabil în timp ce pentru domeniul radiațiilor X, semi-lărgimea crește foarte mult. Ca urmare, nu se recomandă aplicarea modelului Lorentz în domeniul radiațiilor X sau γ , ci mai curând domeniului lungimilor de undă mari. Domeniul vizibil este situat între cele două extreme ale domeniului undelor electromagnetice și modelul Lorentz poate fi utilizat, cu anumite rezerve, în descrierea fenomenelor de absorbție sau emisie.

Exercițiu 1.1. Presupunem un mediu dielectric omogen, izotrop, incolor (de exemplu apă pură sau sticlă) de grosime foarte mare. Folosind modelul Lorentz, explicați modalitatea de propagare a luminii (de exemplu o radiație monocromatică verde) prin acest mediu.

1.5 Câmp electromagnetic de scurtă durată

Considerăm un dipol electric liber ce a suferit o perturbare momentană și presupunem că ulterior, procesul de emisie este de foarte scurtă durată, de amplitudine constantă. Într-un punct oarecare față de dipol, expresia intensității câmpului electric măsurată perpendicular pe direcția de oscilație a dipolului este de forma:

$$e(t) = \begin{cases} \widetilde{E}_0 e^{i(\omega_0 t)} & \text{pentru } -t_1 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{pentru } t < -t_1 \text{ și } t > t_1 \end{cases} \quad (1.69)$$

unde \widetilde{E}_0 este fazorul unei ce conține informații despre amplitudine și fază, iar ω_0 este pulsația proprie a dipolului. Evoluția temporală a intensității câmpului electric pe durata totală de emisie $\Delta t = 2t_1$ este reprezentată în Figura 1.5. Adoptăm tehnica Fourier și descriem forma câmpului emis ca

Referința
axei timpului
a fost aleasă la
mijlocul semnalului
din considerente
pur matematice.

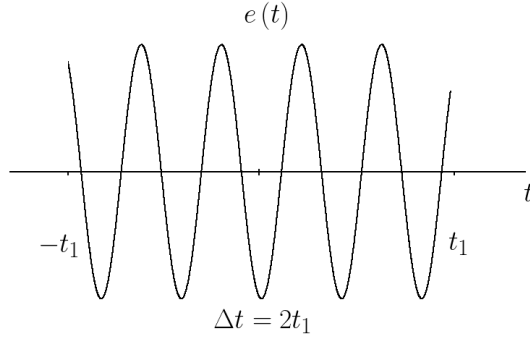


Figura 1.5: Câmp de scurtă durată și amplitudine constantă

o sumă continuă de componente armonice, de pulsație ω . Amplitudinea funcției armonice ω este de forma:

$$\widetilde{E}(\omega) = \widetilde{E}_0 \int_{-t_1}^{t_1} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt \quad (1.70)$$

și evaluând integrala obținem:

$$\widetilde{E}(\omega) = \widetilde{E}_0 \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t_1} - e^{-i(\omega_0 - \omega)t_1}}{2i(\omega_0 - \omega)t_1} \Delta t = \widetilde{E}_0 \frac{\sin(\omega_0 - \omega)t_1}{(\omega_0 - \omega)t_1} \Delta t \quad (1.71)$$

Densitatea de flux spectrală se obține prin medierea vectorului Poynting pe un interval de timp ce poate fi egal cu durata de emisie $\Delta t = 2t_1$:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \frac{1}{2t_1} \frac{|\widetilde{E}(\omega)|^2}{c\mu_0} = \frac{1}{2t_1} \frac{|\widetilde{E}_0(\omega)|^2}{c\mu_0} \frac{\sin^2(\omega_0 - \omega)t_1}{((\omega_0 - \omega)t_1)^2} \Delta t \\ &= \frac{|\widetilde{E}_0(\omega)|^2}{c\mu_0} \frac{\sin^2(\omega_0 - \omega)t_1}{((\omega_0 - \omega)t_1)^2} \end{aligned} \quad (1.72)$$

și este reprezentată grafic în Figura 1.6. Profilul densității de flux ia valoarea maximă pentru $\omega = \omega_0$ și atinge valoarea zero pentru $\omega = \omega_1$ sau

$$(\omega_0 - \omega_1)t_1 = \pi \quad (1.73)$$

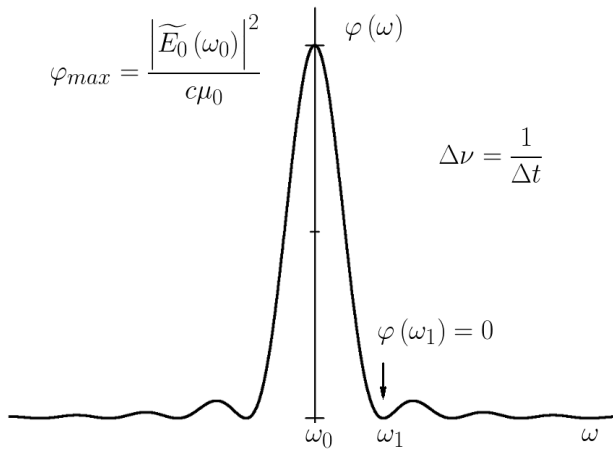


Figura 1.6: Profil spectral – câmp de durată finită

Aproximând semi-lărgimea profilului ca fiind egală cu $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$ care transformată în unități de frecvență, conduce la expresia:

$$\Delta\nu = \frac{1}{2t_1} = \frac{1}{\Delta t} \quad (1.74)$$

Semi-lărgimea
câmpului
de scurtă durată.

Exemplu 1.2. Considerăm un sistem laser ce emite radiații optice sub forma unor pulsuri de durată foarte scurtă, de ordinul $\Delta t = 10 \times 10^{-15}$ s (*ten femtosecond laser*), în domeniul vizibil cu $\lambda_0 = 550$ nm – verde. Înlocuind valorile numerice, semi-lărgimea câmpului de durată finită exprimată în unități de lungime de undă este de ordinul:

$$\Delta\nu = 10^{14} \text{ Hz}, \Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda \Rightarrow \Delta\lambda \approx 100 \text{ nm} \quad (1.75)$$

Altfel spus, pulsul laser este departe de sintagma *radiație monocromatică*, ci este mai degrabă un laser *alb* cu domeniul lungimilor de undă 550 ± 50 nm.

1.6 Structura spectrală a câmpului emis de dipol.

Rezumat

Per ansamblu, ca la orice model, impunem anumite restricții dipolului, evaluăm intensitatea câmpului electric emis de dipol căreia îi aplicăm transformata Fourier și obținem spectrul energiei. Urmând același raționament, să propunem diferite forme posibile ale câmpului emis și aplicând transformata Fourier, să evaluăm forma spectrelor de putere.

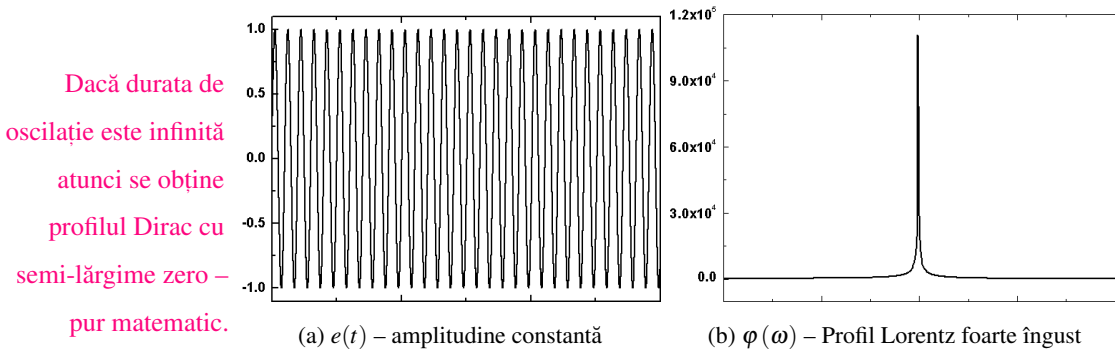


Figura 1.7: Câmp armonic cu amplitudine constantă și durată mare dar finită

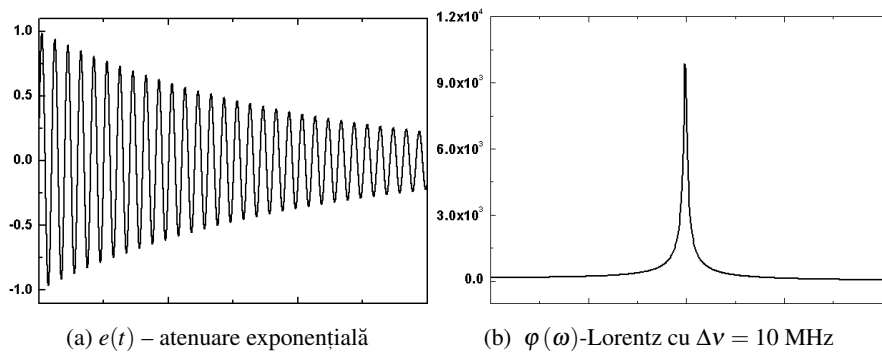


Figura 1.8: Câmp armonic amortizat - modelul Lorentz

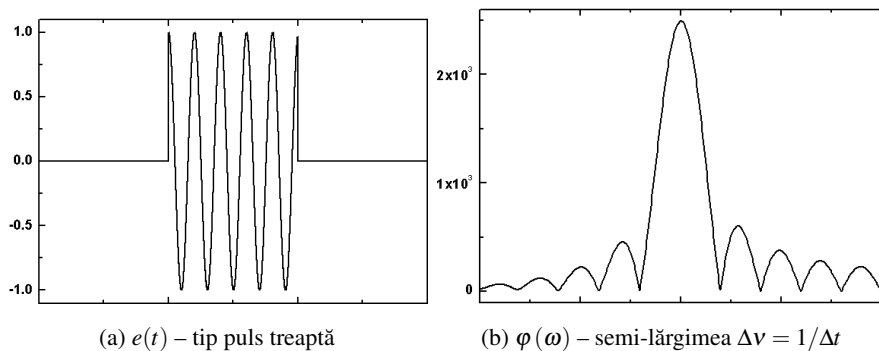
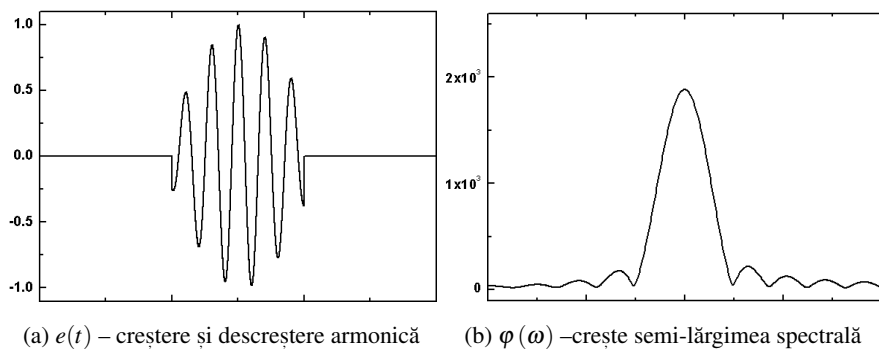


Figura 1.9: Câmp armonic de scurtă durată – Δt femtosecunde

Observația 1.3. Important: cu cât durata de emisie a dipolului Δt este mai scurtă, cu atât semi-lărgimea spectrală $\Delta\nu$ este mare.



Care din aceste
 modele se apropie
 mai mult de
 realitatea fizică?

Figura 1.10: Câmp armonic de scurtă durată - tip puls cosinus

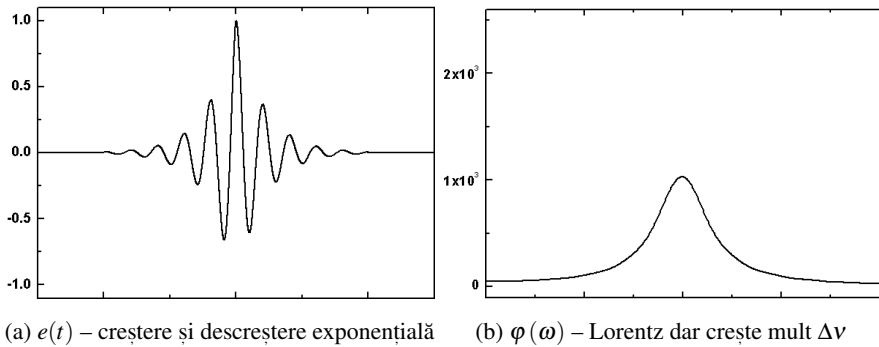


Figura 1.11: Câmp armonic de scurtă durată - tip puls exponențial

Exercițiu 1.2. Folosind rezultatele din Figurile 1.7a, 1.7b, 1.9a, 1.9b, 1.10a, 1.10b, 1.11a și 1.11b, argumentați valabilitatea principiului de incertitudine a lui Heisenberg:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{h}{4\pi} \quad (1.76)$$

Intensitatea câmpului electric este fizic reală de scurtă durată sau e scurtă doar atunci când o măsurăm? Este nevoie de un experimentator pentru ca teoria să fie valabilă?

Capitolul 2

Mecanisme de influențare a spectrelor

2.1 Influența presiunii cinetice – lărgire Lorentz

Considerăm un ansamblu de dipoli electrici identici ce pot interacționa prin ciocniri între dipoli și neglijăm efectul temperaturii. Dacă presiunea este suficient de mare, există posibilitatea ca în timpul emisiei, dipolul să se ciocnească cu alt dipol. Această situație se realizează dacă timpul de relaxare a dipolului T_1 este comparabil cu durata dintre două ciocniri succesive adică cu timpul mediu de ciocnire. Presupunem că ciocnirile între dipoli pot fi atât elastice cât și neelastice.

Ciocniri elastice. În urma proceselor de ciocnire elastică, între partenerii ciocnirii există doar schimb de energie cinetică și ca urmare după ciocnire dipolul ce se afla în procesul de emisie nu-și schimbă amplitudinea ci mai curând faza de oscilație. Dipolul își continuă mișcarea oscilatorie însă pornește cu o fază aleatoare și forma evoluției intensității câmpului electric emis este reprezentată în Figura 2.1a.

Ciocniri neelastice. Dacă ciocnirea este neelastică, partenerii ciocnirii fac schimb de energie cinetică cât și de energie potențială. Pe lângă modificarea

fazei, schimbul de energie potențială conduce la modificarea amplitudinii de oscilație iar evoluția intensității câmpului electric are forma reprezentată în **De ce?** Figura 2.2a. Realitatea fizică este destul de complicată și ciocnirile neelastice sunt greu de imaginat. Mai curând ciocnirile elastice se apropie de realitatea fizică. Schimbul de energie cinetică este în fapt un schimb de impuls ce duce la modificarea direcției de oscilației a dipolului față de punctul fix de observare a evoluției intensității câmpului electric. Amplitudinea câmpului electric emis este maximă privind dipolul perpendicular și egală cu zero dacă privesc dipolul în lungul său și ca urmare variația amplitudinea de oscilație se datorează acestui efect și nu schimbului de energie internă.

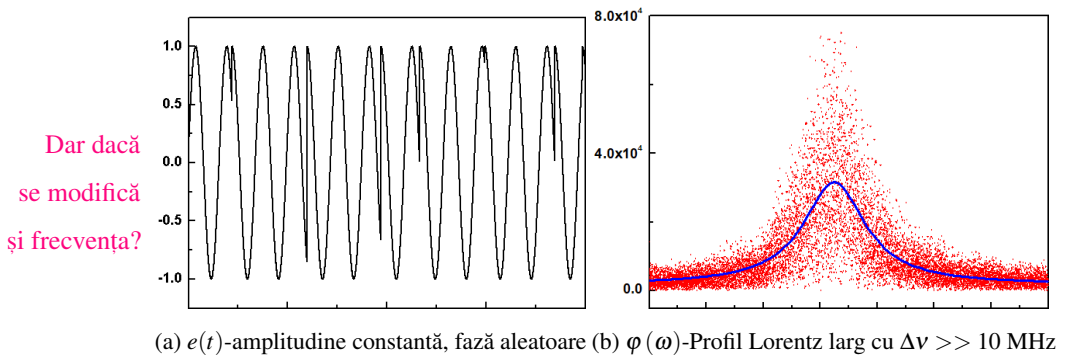


Figura 2.1: Ciocniri elastice - după ciocnire doar faza se modifică și ia valori aleatoare.

Adoptăm aceeași tehnică a transformatei Fourier aplicată evoluției temporale a intensității câmpului electric obținând astfel distribuția spectrală a densității de flux, centrată desigur pe ω_0 – pulsația proprie (Figura 2.1b și Figura 2.2b). Pentru ambele tipuri de ciocniri considerate, spectrul de emisie respectă forma conturului Lorentz dar semi-lărgimea conturului $\Delta\nu_{ciocniri}$ crește foarte mult comparativ cu lărgimea naturală $\Delta\nu_L = 10$ MHz evaluată în situația ideală în care dipolii nu interacționează. Efectul de lărgire a liniilor spectrale datorat presiunii are aplicații practice, de exemplu, în obținerea de surse de lumină ”albă” de putere mare. În Figura 2.3a este reprezentat

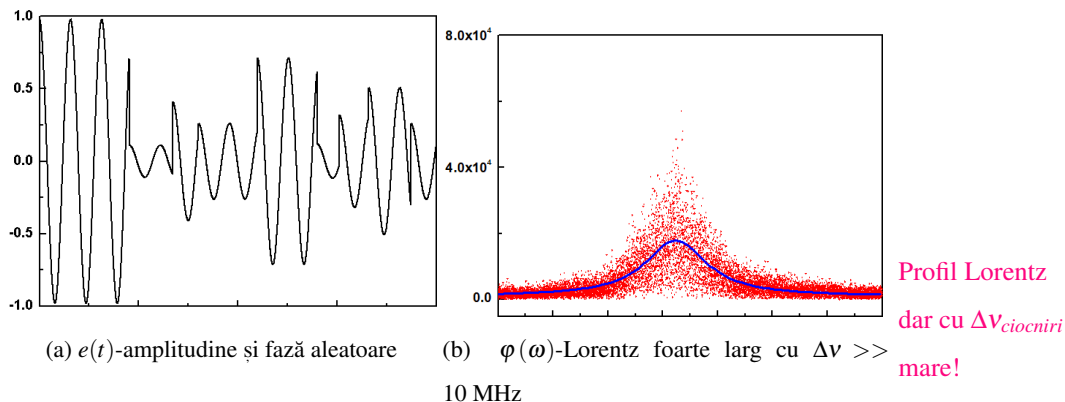


Figura 2.2: Ciocniri neelastice - faza și amplitudinea de oscilație iau valori aleatoare.

spectrul de linii al atomului de xenon, spectru obținut în condiții de presiune joasă de ordinul 0.01 bar. Dacă presiunea crește la 1–3 bar, fiecare linie spectrală se lărgiște și dacă liniile sunt suficient de apropiate ele se unesc rezultând astfel un spectru aproape continuu ca cel din Figura 2.3b unde este reprezentat spectrul emis de o sursă cu xenon, dar la presiune ridicată.

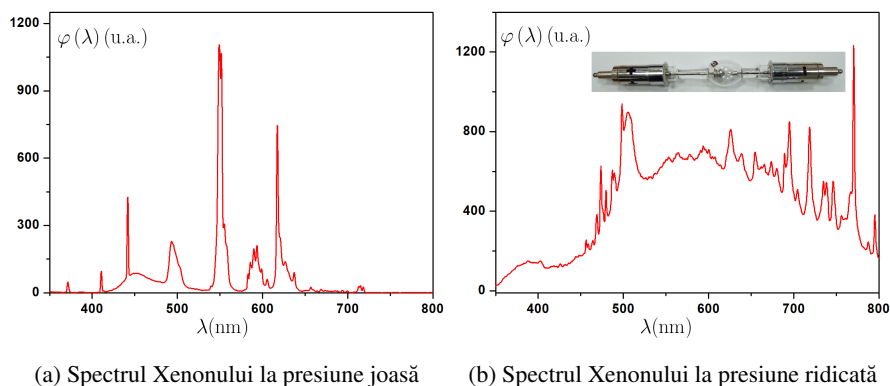


Figura 2.3: Efectul de lărgire a liniilor spectrale datorat presiunii.

2.2 Influența temperaturii – lărgire Doppler

Considerăm un ansamblu de dipoli identici aflați într-o mișcare dezordonată însă cu o probabilitate foarte scăzută de ciocnire – de exemplu un gaz atomic fierbinte dar la presiune joasă. Presupunem că sistemul se află

Definiți temperatura!

la echilibru termodinamic la temperatura T . În aceste condiții, pe durata emisiei, dipolii se află în mișcare și față de un observator fix. Statistic vorbind, parte din dipoli se îndepărtează de observator, parte din ei vin către observator iar o mare parte stau pe loc. Este un efect pur relativist în care sursa este în mișcare iar receptorul este fix. Dacă dipolii sunt identici, toți emit câmp electric cu aceeași pulsație ω_0 – pulsația proprie. Receptorul înregistrează de la fiecare dipol, o altă pulsație ω , diferită de ω_0 – efect Doppler.

Exemplificați

efectul Doppler.

Considerăm un dipol oarecare ce se deplasează cu viteza v (Figura 2.4) iar proiecția vitezei pe direcția dipol – receptor este v_z . Conform teoriei efectului

Dar dacă se mișcă și receptorul ?

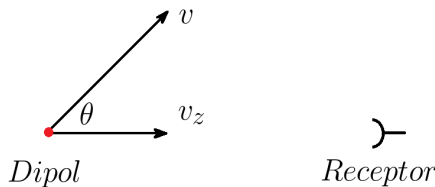


Figura 2.4: Efectul Doppler

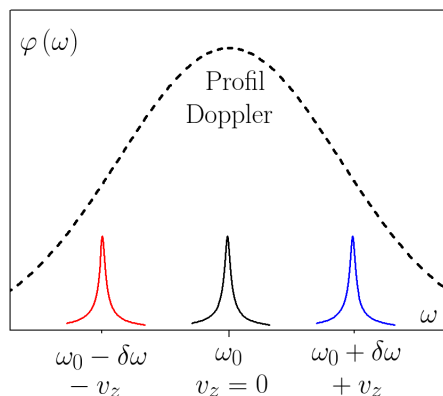
Doppler, receptorul înregistrează pulsația $\omega > \omega_0$ dacă sursa se deplasează spre receptor și

$$\omega = \omega_0 + \vec{k}_0 \cdot \vec{v} = \omega_0 \left(1 + \frac{v_z}{c} \right) = \omega_0 + \delta\omega \quad (2.1)$$

ecuație ce o particularizăm pentru următoare situații:

$$\omega = \begin{cases} \omega_0 + \delta\omega & \text{dacă dipolul se apropie de observator} \\ \omega_0 & \text{dacă dipolul se deplasează perpendicular față de receptor} \\ \omega_0 - \delta\omega & \text{dacă dipolul se îndepărtează de observator} \end{cases}$$

Dacă toți dipolii sunt identici, toți oscilează cu aceeași pulsația proprie ω_0 iar profilul spectral emis este de tip Lorentz cu semi-lărgimea spectrală naturală $\Delta\nu_L \approx 10$ MHz. Deoarece receptorul este fix, el înregistrează o altă pulsație ω ce ia diferite valori, funcție de viteza individuală a fiecărui dipol și cele trei cazuri exemplificate mai sus sunt reprezentate grafic în Figura 2.5.



Profil Doppler
sau
Profil Gauss.

Figura 2.5: Profilul Doppler – superpoziția conturilor Lorentz individuale

La echilibru termodinamic mișcarea browniană de agitație termică este descrisă de distribuția Maxwell. Din cei n_V dipoli din unitatea de volum, numărul dipolilor ce au viteza cuprinsă între v_z și $v_z + dv_z$ este:

$$dn_V(v_z) = n_V \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) dv_z \quad (2.2)$$

unde $\exp\left(-\frac{E_c}{kT}\right)$ reprezintă termenul general Maxwell de distribuție după energia cinetică a particulelor. Aplic transformarea:

$$\delta\omega = \omega - \omega_0 = \omega_0 \frac{v_z}{c} \quad \text{și diferențiată} \quad dv_z = \frac{c}{\omega_0} d(\delta\omega) \quad (2.3)$$

Astfel, numărul dipolilor ce au viteza cuprinsă între v_z și $v_z + dv_z$ pentru care receptorul înregistrează o modificare a pulsației cu $\delta\omega$ față de ω_0 este:

$$dn_V(\delta\omega) = n_V \left(\frac{mc^2}{2\pi\omega_0^2 kT} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mc^2(\omega - \omega_0)^2}{2\omega_0^2 kT}\right) d(\delta\omega) \quad (2.4)$$

James Clerk
Maxwell
(1831–1879)

Termen Boltzmann
 $\exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right)$

Mărimea

$$g_D(\delta\omega) = \left(\frac{mc^2}{2\pi\omega_0^2 kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mc^2(\omega - \omega_0)^2}{2\omega_0^2 kT}\right) \quad (2.5)$$

poartă denumirea de contur spectral Doppler iar semi-lărgimea conturului $\Delta\omega_D$ se obține impunând condiția:

$$\Delta\omega_D = \omega_2 - \omega_1 \text{ unde } \omega_1 \text{ și } \omega_2 \text{ satisfac condiția} \quad (2.6)$$

$$g_D(\omega_1, \omega_0) = g_D(\omega_2, \omega_0) = \frac{g_D(\omega_0)}{2} \quad (2.7)$$

Cu alte cuvinte, pentru ω_1 și ω_2 exponențiala se înjumătățește adică:

$$\exp\left(-\frac{mc^2(\omega_1 - \omega_0)^2}{2\omega_0^2 kT}\right) = \exp\left(-\frac{mc^2(\omega_2 - \omega_0)^2}{2\omega_0^2 kT}\right) = \frac{1}{2} \quad (2.8)$$

și astfel se obține semi-lărgimea Doppler în unități de pulsație:

$$\Delta\omega_D = \sqrt{\frac{8\omega_0^2 kT \ln 2}{mc^2}} \quad (2.9)$$

unde m este masa dipolului.

Observația 2.1. Expresiile practice ale deplasării Doppler exprimate în unități de frecvență și respectiv unități de lungime de undă sunt:

$$\Delta\nu_D = \nu_0 \sqrt{\frac{8kT \ln 2}{mc^2}} \quad (2.10)$$

$$\Delta\lambda_D = \lambda_0 \sqrt{\frac{8kT \ln 2}{mc^2}} \quad (2.11)$$

sau

$$\Delta\nu_D \approx 7.16 \times 10^{-7} \nu_0 \sqrt{\frac{T}{M}} \quad (2.12)$$

$$\Delta\lambda_D \approx 7.16 \times 10^{-7} \lambda_0 \sqrt{\frac{T}{M}} \quad (2.13)$$

unde M este masa molară exprimată în unități atomice de masă și T este temperatura în Kelvin.

Exemplu 2.1. Lărgire Doppler. Considerăm un ansamblu de atomi de Neon ($M = 20$ u.a.) aflați în echilibru termodinamic la temperatura de $T = 400$ K, ce emit radiația monocromatică cu lungimea de undă $\lambda_0 = 632.8$ nm. În aceste condiții, semi-lărgimea liniei spectrale emisă este:

$$\Delta\nu_D \approx 1.5 \text{ GHz sau } \Delta\lambda_D \approx 0.002 \text{ nm} \quad (2.14)$$

Comparați cu
semi-lărgimea
naturală

de ≈ 10 MHz.

Aceste relații sunt foarte utile la determinarea temperaturii unui gaz prin măsurarea conturului unei linii spectrale specifice gazului respectiv.

2.3 Mecanisme de lărgire omogenă și neomogenă

Dacă dipolii sunt liberi sau suferă ciocniri între ei cu o frecvență relativ scăzută de ciocnire, atunci toți dipolii emit la aceeași pulsație ω_0 , forma profilului individual de emisie fiind de tip Lorentz, identic pentru toți dipolii. Întotdeauna detectorul cu care se face monitorizarea emisei, sumează contribuțiile individuale. În acest caz, prin sumarea tuturor profilelor Lorentz (Figura 2.6a) se obține tot un profil Lorentz și acest tip de lărgire a profilului spectral este cunoscut sub denumirea de *lărgire omogenă*.

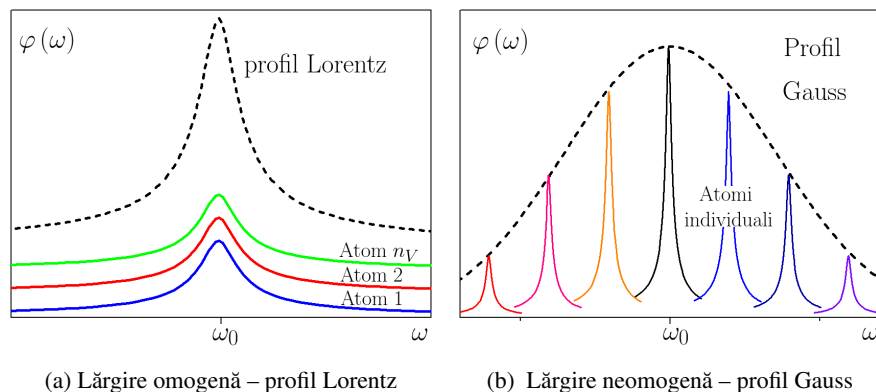


Figura 2.6: Mecanisme de lărgire omogenă și neomogenă

Dacă însă ansamblul de dipoli se află într-o mișcare continuă dezordonată măsurată macroscopic prin intermediul temperaturii, atunci intervine și mecanismul de lărgire Doppler. Detectorul înregistrează de la fiecare dipol contribuția lor proprie, identică ca formă, dar la o altă pulsație, diferită de ω_0 (Figura 2.6b). În același timp, sumarea se face ținând cont de distribuția după vitezele dipolilor care nu este una liniară ci una simetric exponențială față de $v = 0$ unde distribuția Maxwell își atinge maximumul de probabilitate. Acest mecanism de lărgire a linii spectrale este cunoscut sub denumirea de *lărgire neomogenă*.

2.4 Influența vitezei de drift – deplasare Doppler

Presupunem că ansamblul de dipoli identici, pe lângă mișcarea termică dezordonată, efectuează și o mișcare dirijată de drift față de observatorul fix. Mișcarea termică dezordonată conduce așa cum am văzut la lărgirea liniilor spectrale iar mișcarea de drift conduce la deplasarea liniilor spectrale (deplasare în frecvență sau în lungime de undă). Dacă sursa emite frecvența ν_0 și se deplasează către observator (*deplasare spre albastru – blueshift*) atunci frecvența măsurată (observată) are valoarea:

$$\nu_{obs} = \nu_0 \left(1 + \frac{v_z}{c} \right) \quad (2.15)$$

Scădem din ambii membri ai ecuației valoarea ν_0 ,

$$\nu_{obs} - \nu_0 = \nu_0 \frac{v_z}{c} \text{ și notez } \Delta f_D = \nu_{obs} - \nu_0 \quad (2.16)$$

și de aici diferența între frecvența emisă și cea recepționată devine:

$$\Delta f_D = \frac{\nu_0 v_z}{c} \text{ respectiv } v_z = c \frac{\Delta f_D}{\nu_0} \quad (2.17)$$

Această ultimă relație se aplică în ambele variante adică și atunci când sursa se îndepărtează de receptor (*deplasare spre roșu – redshift*). Dacă sursa în

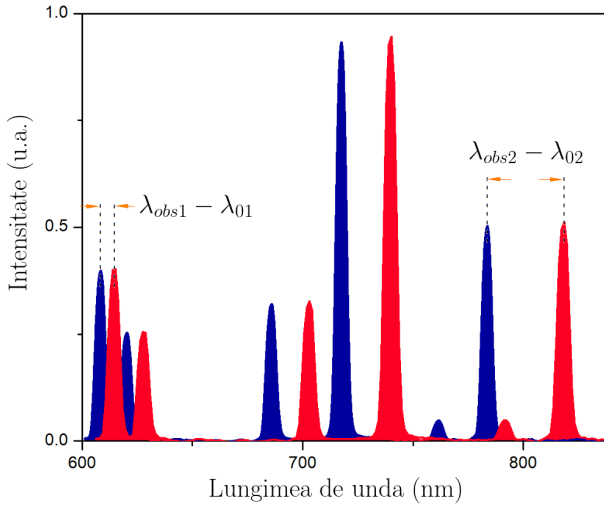


Figura 2.7: Deplasarea spre roșu a întregului spectru

mișcare emite un spectru larg de linii atunci tot spectrul va fi deplasat față de spectrul sursei staționare, ca în Figura 2.7.

În domeniul astrofizicii se definește parametrul adimensional z sau *redshift* [1] ce este folosit ca un indicator al vitezei de deplasare:

$$z \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{v_{\text{obs}} - v_0}{v_0} = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0}{\lambda_0} \quad (2.18)$$

parametru care în domeniul vitezelor mici devine:

$$z = \frac{v_z}{c} \quad (2.19)$$

Observația 2.2. Dacă viteza v_z este constantă, atât parametrul z cât și variația în frecvență Δf_D sunt constante oricare ar fi lungimea de undă de referință λ_0 . Însă, pentru două lungimi de undă de referință diferite, valoarea $\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0$ crește în domeniul lungimilor de undă mari (Figura 2.7).

Domaniul de aplicabilitate al acestui rezultat este limitat de valoarea vitezei v_z . Dacă viteza sursei tinde la c atunci Δf_D tinde la o valoare maximă și teoretic nu poate crește mai mult. Ca urmare, relația este aplicabilă în domeniul nerelativist al vitezei. În practică această metodă de măsurare a vitezei este utilizată pe scară largă în domeniul meteorologiei pentru obținerea

hărților curenților de aer sau localizarea formațiunilor noroase caracteristice furtunilor. Folosind același principiu, *radarul Doppler* este utilizat la măsurarea vitezei unor vehicule în mișcare precum un avion sau o mașină. De reținut este faptul că prin măsurarea diferenței între frecvența emisă și cea recepționată se poate determina doar componenta vitezei pe direcția sursă – receptor, nu valoarea totală a vitezei.

2.4.1 Deplasarea Doppler – domeniul relativist

Dacă viteza sursei este foarte mare, apropiată din viteza luminii, atunci în expresia ecuației Doppler, factorul Lorentz nu mai poate fi neglijat

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{cu} \quad \beta = \frac{v_z}{c} \quad (2.20)$$

Exemplu 2.2. La viteze mici, factorul Lorentz ia valoarea 1 iar dacă, de exemplu, viteza atinge 80 % din viteza luminii, factorul Lorentz ia valoarea $\gamma = 1.66$.

Dacă sursa se îndepărtează de observator atunci frecvența observată are valoarea:

$$\nu_{obs} = \gamma \nu_0 \left(1 - \frac{v_z}{c}\right) \quad (2.21)$$

unde ν_0 este frecvența sursei măsurată în sistemul laboratorului. Dezvoltând calculul, ecuațiile efectului Doppler relativist specifice deplasării spre roșu devin:

$$\nu_{obs} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad \text{în unități de frecvență} \quad (2.22)$$

$$\lambda_{obs} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad \text{în unități de lungimi de undă} \quad (2.23)$$

Folosind această ultimă relație și revenind la definiția parametrului z *redshift*, în cazul relativist acesta devine:

$$\lambda_{obs} - \lambda_0 = \lambda_0 \left(\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1 \right) \quad (2.24)$$

și respectiv

$$z \stackrel{def.}{=} \frac{\lambda_{obs} - \lambda_0}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1 \quad (2.25)$$

Exemplu 2.3. Efectul Doppler relativist se aplică cu precădere în domeniul astronomiei. Elementul chimic cel mai abundent din Univers este hidrogenul și pentru a măsura viteza de deplasare a unor nori de gaz, stele sau galaxii, se urmărește una din liniile spectrale ale hidrogenului. Pe de altă parte, datorită norilor denși de praf inter-stelar se preferă o linie spectrală din domeniul microundelor, domeniu puțin afectat de efectele de împrăștiere sau absorbție. Nivelul fundamental al hidrogenului are o structură hiper-fină datorită interacțiunii dintre spinul electronului și spinul protonului. Electronul fiind mai ușor își inversează spinul (sistemul trece din spini paraleli în spini antiparaleli) iar unda emisă se situează în domeniul microundelor și are caracteristicile:

$$\nu_0 = 1420.406 \text{ MHz} \quad \text{și respectiv} \quad \lambda_0 = 21 \text{ cm}$$

Dacă obiectul studiat se mișcă relativist, de exemplu se îndepărtează, analizând linia *spin-flip* a hidrogenului care măsurată în sistemul de referință al Pământului are caracteristicile:

$$\nu_{obs} = 473.468 \text{ MHz} \quad \text{și respectiv} \quad \lambda_{obs} = 63 \text{ cm}$$

atunci $\beta = 0.8$ adică obiectul studiat se îndepărtează cu o viteză reprezentând 80 % din viteza luminii. Deși este adimensional, parametrul *redshift* indică o măsură a vitezei și în acest caz ia valoarea $z = 2$.

Spin-flip
transition.

2.4.2 Deplasarea spre roșu - expansiunea Universului

Din punctul de vedere al astrofizicii, chiar dacă sursa și receptorul au o viteză de deplasare relativă mică (efectul Doppler este neglijabil), experimental se constată că spectrul sursei (de exemplu o galaxie îndepărtată) este deplasat spre roșu. Acest fapt se datorează fenomenului de expansiune a Universului, distanța dintre sursă și observator crește în timp iar viteza de expansiune poate depăși chiar viteza luminii. Acest fapt nu este în contradicție cu principiul relativității ce afirmă că orice particulă materială nu poate depăși viteza luminii în vid deoarece spațiul nu are masă.

Edwin Hubble (1889 - 1953) Expansiunea Universului sau *Hubble flow* a fost intens analizată în anii 1920 - 1930 și astăzi legea care descrie viteza de expansiune v în funcție de distanța d este cunoscută ca legea lui Hubble:

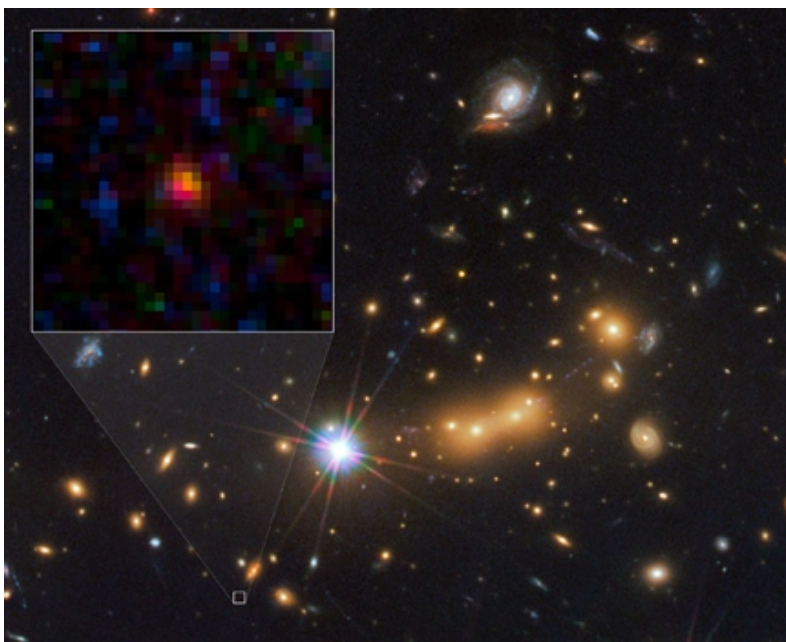
$$d = \frac{v}{H_0} \text{ cu } H_0 = 2.43 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1} \text{ sau } H_0 = 74.03 \text{ km/s/Mps} \quad (2.26)$$

unde H_0 este constanta Hubble.

Vârsta Universului se evaluează ca fiind inversul constantei Hubble astfel:

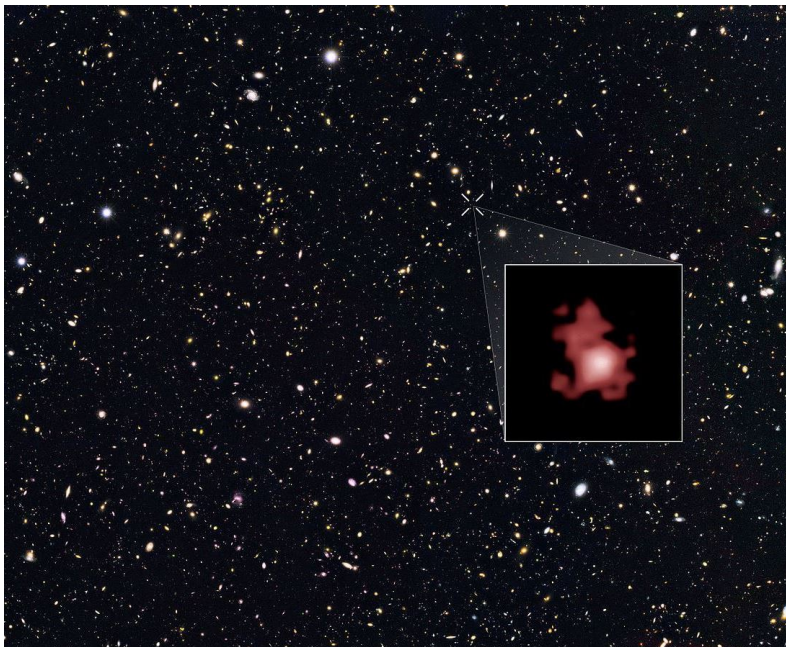
$$\text{vârsta Univers} = \frac{1}{H_0} = 13.8 \times 10^9 \text{ ani} \quad (2.27)$$

Exemplu 2.4. Experimental s-au detectat galaxii pentru care parametrul z *redshift* ce indică expansiunea Universului [2], are valori mai mari ca 10, caz în care viteza de expansiune a acestor galaxii reprezintă 98 % din viteza luminii (Figura 2.8a și Figura 2.8b). Introducând valoarea vitezei în legea de expansiune a lui Hubble se poate evalua distanța la care se aflau aceste obiecte atunci când au emis lumina detectată. Pentru $z > 10$ aceste galaxii se aflau la mai bine de 13 miliarde ani lumină.



(a) Galaxia MACS0647-JD aflată la 13.3 miliarde ani lumină.

Image credit: NASA/ESA/STScI/CLASH [3]



(b) Galaxia GN-z11 aflată la 13.4 miliarde ani lumină ($z=11.1$).

Image credit: ESA/Hubble [4, 5]

Figura 2.8: Galaxii la marginea Universului observabil

Capitolul 3

Sisteme cuantice

3.1 Niveluri energetice și lărgimea energetică a acestora

Presupunem un ansamblu de atomi liberi ce nu interacționează între ei. Din punct de vedere cuantic fiecărui atom îi corespunde o diagramă energetică specifică nivelurilor excitate, identică pentru toți atomii considerați. Întreg ansamblu de atomi poate fi descris analizând proprietățile unui singur atom căruia îi corespunde o diagramă ca cea reprezentată în Figura 3.1.

Presupunem că în unitatea de volum sunt n_V atomi distribuiți pe diferite stări energetice: E_0 – nivel fundamental, E_1 – primul nivel staționar, E_2 – al doilea nivel staționar, ș.a.m.d.

$$n_V = n_0 + n_1 + n_2 + \dots \quad (3.1)$$

unde n_i reprezintă populația nivelului i ce are gradul de degenerare g_i și timpul de viață τ_i .

Observația 3.1. Pe un nivel oarecare i nu toți atomii au aceeași energie E_i , chiar dacă ei sunt identici și în același timp liberi. Există o incertitudine în evaluarea energiei fiecărui nivel și distribuția populației n_i pe nivelul i este

descrișă de funcția Lorentz (Figura 3.1). Incertitudinea energetică ΔE_i se evaluează din semi-lărgimea profilului Lorentz (FWHM –full width half maximum) măsurată la jumătatea maximului densității de probabilitate (la jumătatea pătratului funcției de undă din modelul Schrödinger).

Incertitudinea energetică ΔE_i , alături de timpul de viață τ_i sunt o mărimi specifice fiecărui nivel energetic. Relația fundamentală de interdependență dintre cele două mărimi este dată de principiul de incertitudine a lui Heisenberg:

Werner Karl

Heisenberg

Premiul Nobel

pentru Fizică 1932.

$$\Delta E_i \tau_i \geq \frac{h}{4\pi} \quad (3.2)$$

Exemplu 3.1 (Nivel fundamental). Timpul de viață al nivelului cu energie minimă (nivel fundamental) este infinit $\tau_0 = \infty$ și ca urmare semi-lărgimea nivelului fundamental este $\Delta E_0 = 0$. Dacă nivelul fundamental este despiciat (e.g. atomul de aluminiu are două niveluri fundamentale datorită cuplajului spin electron – spin nucleu) timpul de viață al celor două niveluri este tot infinit.

Cât de mare

e acest infinit?

Distribuția Lorentz

nu atinge

valoarea zero.

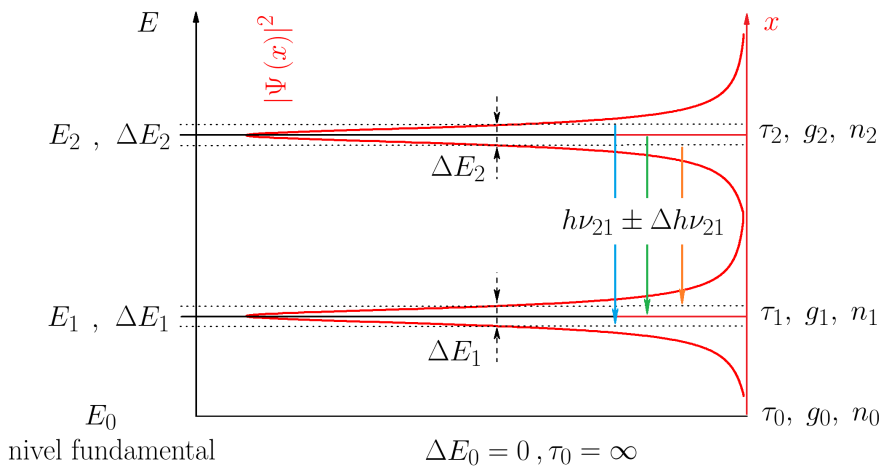


Figura 3.1: Distribuția de probabilitate a existenței stărilor energetice staționare.

Măsurătorile experimentale au arătat că timpul de viață specific unui nivel excitat i este de ordinul a:

$$\tau_i \approx 10^{-8} \text{ s} \quad (3.3)$$

Observația 3.2. Folosind identitatea Heisenberg, se poate evalua semi-lărgimea nivelului i exprimată în unități de frecvență:

$$\Delta\nu_i \approx 10^7 \text{ Hz} \approx 10 \text{ MHz} \quad (3.4)$$

valoare egală cu *semi-lărgimea naturală* determinată din profilul Lorentz folosind modelul dipolului electric, model clasic.

Considerăm că populația nivelului 2 se micșorează datorită dezexcitărilor spontane pe nivelul inferior 1 și în urma acestui proces se emit fotoni de energie $h\nu_{21}$. Datorită faptului că fiecare nivel este caracterizat printr-o incertitudine energetică, ΔE_1 respectiv ΔE_2 , fotonii emiși la tranziții atomice individuale nu vor avea toți aceeași frecvență (Figura 3.1). Domeniul de variație a frecvenței va depinde de suma incertitudinilor energetice specifice fiecărui nivel:

$$h\nu_{21} \pm \Delta h\nu_{21} = E_2 - E_1 \pm (\Delta E_2 + \Delta E_1) \quad (3.5)$$

sau

$$\Delta\nu_{21} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_1} \right) \quad (3.6)$$

Chiar dacă atomii sunt liberi, fără acțiuni externe, profilul de emisie spontană măsurat pentru întreg ansamblul de atomi, are o *semi-lărgime spectrală*. Valoarea $\Delta\nu_{21}$ este determinată de principiul de incertitudine a lui Heisenberg prin intermediul timpilor de viață a nivelurilor energetice implicate în tranziția spontană.

3.2 Probabilități de tranziție

3.2.1 Emisia spontană (naturală)

Considerăm un ansamblu de sisteme atomice descris energetic prin diagrama reprezentată în Figura 3.1. Am văzut mai sus că nu toți fotonii emiși spontan au aceeași energie. Mai mult, procesul de emisie spontană este unul statistic în care momentul de timp la care are loc emisia, direcția de emisiei a fotonului, starea de polarizare, sunt aleatoare și independente de celelalte procese de emisie.

Observația 3.3. Nu există doi fotoni emiși spontan identici!

Din punct de vedere statistic, numărul de tranziții spontane, de pe nivelul 2 pe nivelul 1, realizate într-un interval de timp Δt , depinde de populația nivelului superior n_2 ,

$$\Delta n_{21}^{spontan} = A_{21} n_2 \Delta t \quad (3.7)$$

Albert Einstein
Premiul Nobel
pentru Fizică
1921.

iar coeficientul de proporționalitate A_{21} (s^{-1}) [6], introdus de Einstein, reprezintă *probabilitatea de emisie spontană la tranziția $2 \rightarrow 1$* . Coeficientul Einstein A_{21} nu depinde de frecvență, ba mai mult, descrie o proprietate intrinsecă a tranziției $2 \rightarrow 1$.

3.2.2 Fenomene forțate: absorbția și emisia stimulată

Presupunem că asupra sistemelor atomice, acționează din exterior, un câmp electromagnetic de frecvență ν apropiată ca valoare de ν_{21} (în apropierea rezonanței). Câmpul electromagnetic extern este statistic izotrop, fără o direcție preferențială a fotonilor. Din punct de vedere energetic, câmpul extern este descris prin mărimea $\rho(\nu)$ numită *densitate spectrală*, mărime dependentă de numărul de fotoni prezenți în unitatea volum, într-o secundă, exprimată în ($J m^{-3} s^{-1}$) sau ($W m^{-3}$). Câmpul extern poate forța atomii astfel încât sunt posibile ambele fenomene, atât absorbția cât și emisia stimulată.

Dacă timpul de viață τ_2 este suficient de mare, sistemele cuantice de pe nivelul 2 pot fi forțate de câmpul extern să efectueze tranziții stimulate, înaintea realizării emisiei spontane. Sistemul cuantic revine pe starea 1 prin emisia unui foton ce are aceleași proprietăți (energie, fază, frecvență, polarizare și direcție) cu fotonul ce a provocat stimularea, foton care nu se pierde (Figura 3.2).

Observația 3.4. Fotonul emis stimulat este identic cu fotonul care a produs stimularea!

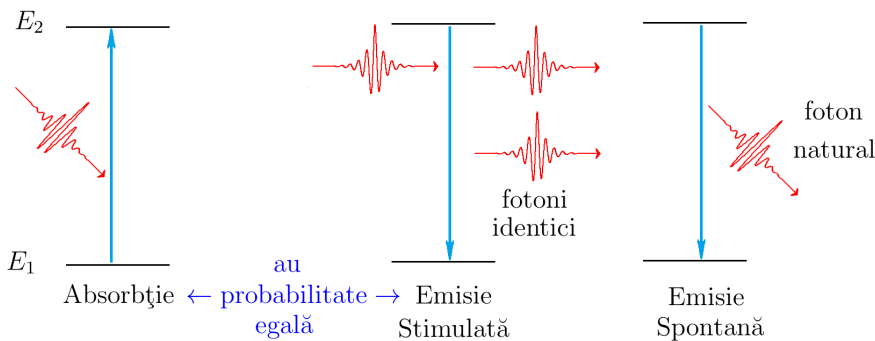


Figura 3.2: Tipuri de tranziții radiative clasice.

Numărul fotonilor absorbiți și respectiv emiși stimulat [6], în interval de timp Δt

$$\Delta n_{12}^{absorbție} = \rho(\nu) B_{12} n_1 \Delta t \quad (3.8)$$

$$\Delta n_{21}^{stimulat} = \rho(\nu) B_{21} n_2 \Delta t \quad (3.9)$$

depinde de valoarea densității spectrale a câmpului extern, de populațiile nivelurilor de pe care se realizează tranziția, iar proporționalitatea este asigurată de B_{12} și respectiv B_{21} , coeficienți Einstein ce nu depind de frecvența câmpului extern. B_{12} și B_{21} sunt mărimi specifice tranziției, proprii sistemelor cuantice și ca urmare valorile lor nu depind de forma distribuției $\rho(\nu)$. Dacă $\nu \approx \nu_{21}$ (rezonanță) atunci $\rho(\nu)$ este “îngustă”, în opoziție cu distribuția Planck, de echilibru termodinamic, când $\rho(\nu)$ acoperă un domeniu larg de frecvențe. Max Planck Premiul Nobel pentru Fizică 1918.

Dați exemple de “corp negru”.

Einstein a dedus existența unui nou proces de emisie (cea stimulată) pentru a explica forma distribuției spectrale a “corpului negru”, determinând astfel egalitatea:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad (3.10)$$

unde g_1 și g_2 sunt gradele de degenerare corespunzătoare nivelurilor implicate.

Observația 3.5. Dacă $g_1 = g_2$ atunci $B_{12} = B_{21}$.

Absorbția și emisia stimulată au probabilități egale de realizare. Acest lucru era de așteptat deoarece ambele procese sunt fenomene forțate.

Luând în considerare doar două niveluri energetice (Figura 3.1), chiar dacă “pompaajul extern” ar crește foarte mult ($\rho(\nu) \rightarrow \infty$), populațiile nivelurilor 1 și 2 se egalează, $n_1 = n_2$, iar *inversia populației* nu se realizează, proces fundamental în funcționarea unui sistem laser.

3.3 Timpul de viață

Presupunem un ansamblu de sisteme cuantice libere. La momentul $t_0 = 0$, doar pentru un interval de timp foarte scurt, acționează rezonant din exterior un câmp electromagnetic ce populează nivelul 2 (Figura 3.1) cu n_{02} stări. La $t > t_0$, factorul extern încetează și dacă inițial $n_2 = n_{02}$, depopularea nivelului 2 se va realiza doar prin tranziții spontane $2 \rightarrow 1$:

De ce cu minus?

$$d(n_2)_1 = -A_{21} n_2(t) dt \quad (3.11)$$

unde coeficientul Einstein A_{21} este caracteristic tranzițiilor spontane și deci nu depinde de timp. Prin integrare

$$\int_{n_{02}}^{n_2(t)} \frac{1}{n_2(t)} d(n_2)_1 = \int_0^t -A_{21} dt \quad (3.12)$$

se obține legea de relaxare naturală a unei stări energetice prin tranziții spontane $2 \rightarrow 1$:

$$n_{21}(t) = n_{02}e^{-A_{21}t} \quad (3.13)$$

În general dezexcitarea spontană se realizează preferențial pe un singur nivel chiar dacă există mai multe niveluri inferioare pe care ar putea avea loc tranziția și pentru simplitate, legea de relaxare radiativă se scrie:

$$n_2(t) = n_{02}e^{-A_2t} \quad (3.14)$$

Această dependență exponențială a permis definirea timpului mediu de viață a unui nivel energetic ca fiind egal cu durata după care populația nivelului excitat scade de e ori:

$$\tau_2 = \frac{1}{A_2} \quad (3.15)$$

Timpul mediu de viață al unei stări energetice este egal cu inversul coeficientului Einstein pentru tranziții radiative spontane. Astfel, mărimea A_2 ia semnificație fizică reală.

Exemplu 3.2. Nivel metastabil. Timpul de viață a unui nivel excitat este în general mic, de ordinul $\tau \approx 10^{-8}$ s. Există stări particulare cu un timp de viață semnificativ mai mare, cu câteva ordine de mărime, până la $\tau \approx 10^{-6} \div 10^{-4}$ s. Aceste stări se numesc metastabile.

Dacă revenim la principiul de incertitudine a lui Heisenberg, un timp de viață mare conduce la o incertitudine energetică ΔE mică a stărilor metastabile.

Observația 3.6. Stările metastabile sunt înguste din punct de vedere energetic.

Am presupus că sistemele cuantice sunt libere și această situație ideală poate fi atinsă experimental la măsurarea timpilor de viață specifici, pentru

un gaz pur rarefiat, la temperatură joasă. În realitate există posibilitatea unor interacțiuni între sisteme cuantice identice sau diferite, sau cu alți factori externi. Dacă presiunea este ridicată, de exemplu egală cu cea atmosferică, vor exista ciocniri între sistemele cuantice, sau ciocniri cu peretele incintei în care este introdus gazul de analizat. Dacă frecvența ciocnirilor este ridicată, energia de excitare poate fi transferată rezonant altor sisteme cuantice, înainte ca dezexcitarea spontană radiativă să se producă. Există posibilitatea ciocnirilor cu transfer de energie internă convertită în energie cinetică a partenerului de ciocnire, dacă acesta are masă mică. Ciocnirea cu peretele incintei va conduce la transformarea energiei interne în căldură. Toți acești factori de interacțiune vor conduce la o depopulare suplimentară a nivelului excitat prin tranziții generice numite, *tranziții neradiative*. În mod analog, se introduce un coeficient Einstein γ pentru tranziții neradiative iar legea de relaxare a unei stări energetice devine:

$$n_2(t) = n_{02}e^{-(A_2+\gamma)t} \quad (3.16)$$

Existența tranzițiilor neradiative conduce la diminuarea timpului de viață

$$\tau_2^{efectiv} = \frac{1}{(A_2 + \gamma)} = \frac{\tau_2}{1 + \gamma/A_2} < \tau_2 \quad (3.17)$$

iar semi-lărgimea energetică crește

$$\Delta E_2^{ciocniri} \approx \frac{1}{\tau_2^{efectiv}} \frac{h}{4\pi} = \frac{1}{\tau_2} \frac{h}{4\pi} \left(1 + \frac{\gamma}{A_2}\right) = \Delta E_2 \left(1 + \frac{\gamma}{A_2}\right) \quad (3.18)$$

Cu cât timpul de viață este mai mare cu atât ar trebui să scadă semi-lărgimea energetică. Un timp de viață mare conduce și la o creștere a probabilității de realizare a tranzițiilor neradiative care conduc la creșterea semi-lărgimii. E un cerc închis la care concură cele două posibilități de dezexcitare: radiativ și respectiv neradiativ iar acest efect al interacțiunilor se manifestă indiferent dacă nivelul este metastabil sau nu.

Exemplu 3.3. La presiune scăzută, tranziția $C^3\Pi_u \rightarrow B^3\Pi_g$ specifică laserului cu azot molecular (337.1 nm), are un timp de viață cu limita superioară de 40 ns. La presiune atmosferică, timpul efectiv de viață scade semnificativ la 2.5 ns.

3.4 Interacțiunea radiațiilor optice cu sistemele cuantice

Considerăm un ansamblu n_V de sisteme cuantice aflat la temperatura T . La echilibru termodinamic distribuția populațiilor n_i pe nivelurile energetice E_i (Figura 3.1), este guvernată de distribuția Boltzmann, care concretizată pentru nivelul 2 are forma:

$$n_2 = n_V \frac{g_2 e^{-\frac{E_2}{kT}}}{\sum_{n_i} g_i e^{-\frac{E_i}{kT}}} \quad (3.19)$$

Relativ la două niveluri succesive, din distribuția Boltzmann deducem:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} \quad (3.20)$$

și deoarece temperatura T este o mărime strict pozitivă, deducem ușor faptul că la echilibru termodinamic întotdeauna este realizată condiția:

$$n_1 > n_2 > n_3 > \dots \quad (3.21)$$

Presupunem că prin acest ansamblu de sisteme cuantice se propagă un fascicul monocromatic de raze paralele, de frecvență ν_s și semi-lărgime spectrală $\delta\nu_s$. De asemenea presupunem interacțiunea în apropierea rezonanței, deci ν_s este apropiată de cea specifică tranziției $2 \rightarrow 1$ caracterizată prin frecvența ν_{21} cu semi-lărgimea spectrală $\Delta\nu_{21}$ și suplimentar considerăm $\delta\nu_s \ll \Delta\nu_{21}$ (Figura 3.3). Tranzițiile posibile induse sistemelor cuantice sunt descrise atât prin fenomenul de absorbție cât și prin cel de emisie stimulată. Dacă densitatea de energie $\rho(\nu_s)$ asociată fasciculului extern este relativ

De ce? mare, atunci putem neglija fenomenul de emisie spontană. Suplimentar presupunem că majoritatea tranzițiilor sunt radiative și au loc doar între nivelurile 1 și 2 (Figura 3.1). Ca urmare, în decursul deplasării fasciculului prin ansamblul de sisteme cuantice, într-un punct oarecare de coordonate x din spațiul de propagare a fasciculului, variația în timp a populațiilor nivelurilor 1 și 2 sunt egale și de semn opus:

$$\frac{dn_2}{dt} = -\frac{dn_1}{dt} \quad (3.22)$$

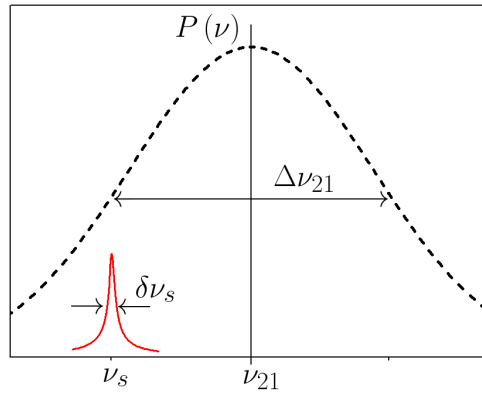


Figura 3.3: Interacțiunea fasciculului monocromatic ν_s cu sistemele cuantice.

Definim o funcție $g(\nu_s, \nu_{21})$ care exprimă gradul de suprapunere a profi-

De exemplu, lului câmpului extern peste profilul tranziției $2 \leftrightarrow 1$ (Figura 3.3) și introduce departe de rezonanță când ecuațiile Einstein ce descriu fenomenele forțate de absorbție și emisie $g(\nu_s, \nu_{21}) = 0$. stimulată găsim:

$$\frac{dn_2}{dt} d\nu = g(\nu_s, \nu_{21}) \rho(\nu_s) B_{12} n_1 d\nu - g(\nu_s, \nu_{21}) \rho(\nu_s) B_{21} n_2 d\nu = -\frac{dn_1}{dt} d\nu \quad (3.23)$$

sau

$$-\frac{dn_2}{dt} d\nu = B_{12} \left(\frac{B_{21}}{B_{12}} n_2 - n_1 \right) g(\nu_s, \nu_{21}) \rho(\nu_s) d\nu \quad (3.24)$$

În punctul de coordonate x , variația în timp a densității de energie corespunzătoare fascicului extern se obține prin înmulțirea variației populației (ce exprimă numărul de tranziții) cu energia unui foton:

$$\frac{d\rho(v_s)}{dt}dv = hv_s \left(-\frac{dn_2}{dt}dv \right) dv \quad (3.25)$$

sau

$$\frac{d\rho(v_s)}{dt}dv = B_{12} \left(\frac{B_{21}}{B_{12}}n_2 - n_1 \right) g(v_s, v_{21}) \rho(v_s) hv_s dv \quad (3.26)$$

Integrarea acestei ecuații trebuie făcută după forma conturului fascicului extern δv_s iar dacă $\delta v_s \ll \Delta v_{21}$, pentru simplitatea calculului putem considera un profil Dirac pentru fascicului extern astfel încât:

$$\frac{d\rho(v_s)}{dt} = B_{12} \left(\frac{B_{21}}{B_{12}}n_2 - n_1 \right) g(v_s, v_{21}) \rho(v_s) hv_s \quad (3.27)$$

În această expresie, valorile extreme ale funcției $g(v_s, v_{21})$ sunt 1 pentru $v_s = v_{21}$ (rezonanță) și respectiv 0 departe de rezonanță. Ne interesează în ce condiții fascicului extern, interacționând cu sistemele atomice, este amplificat sau atenuat pe o distanță dx parcursă în intervalul de timp dt . Ținând cont de expresia vitezei luminii în mediul rarefiat de sistemelor atomice:

$$dt = \frac{dx}{c} \quad (3.28)$$

variația densității de energie asociată fascicului extern devine:

$$\frac{d\rho(v_s)}{dx} = B_{12} \left(\frac{B_{21}}{B_{12}}n_2 - n_1 \right) g(v_s, v_{21}) \rho(v_s) hv_s \frac{1}{c} \quad (3.29)$$

care integrată pe distanța L conduce la expresia clasică a legii Lambert–Beer:

$$\rho(v_s, L) = \rho(v_s, 0) \exp \left[hv_s \frac{1}{c} B_{12} \left(\frac{B_{21}}{B_{12}}n_2 - n_1 \right) g(v_s, v_{21}) L \right] \\ \stackrel{not.}{=} \rho(v_s, 0) \exp [-a(v_s) L] \quad (3.30)$$

unde $a(v_s)$ se numește coeficient liniar spectral de extincție. Expresia mării $a(v_s)$ se simplifică introducând și relația de dependență între coeficienții

Einstein:

$$\frac{B_{21}}{B_{12}} = \frac{g_2}{g_1}$$

$$a(\nu_s) = h\nu_s \frac{1}{c} B_{12} \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right) g(\nu_s, \nu_{21}) \quad (3.31)$$

Funcție de valorile populațiilor n_1 și n_2 și funcție de gradele de degenerate ale stărilor 1 și 2 (pe care pentru simplitatea discuției le presupunem $g_1 = g_2 = 1$), sunt posibile următoarele situații (Figura 3.4):

Absorbția clasică.

- Fasciculul este atenuat dacă $n_2 < n_1$;
- Mediul este perfect transparent dacă $n_2 = n_1$;

Amplificare.

- Fasciculul este amplificat dacă $n_2 > n_1$;

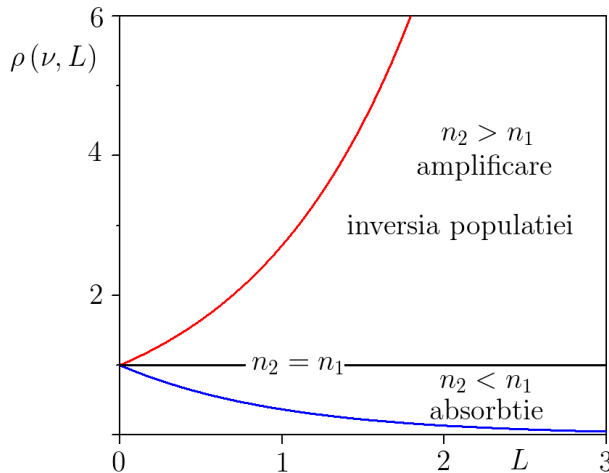


Figura 3.4: Atenuarea sau amplificarea liniară funcție de relația între populații

Observația 3.7. Condiția $n_2 > n_1$ nu este realizabilă în condițiile echilibrului termodinamic guvernat de distribuția Boltzmann a populațiilor stărilor 1 și 2 dar este o condiție imperativă pentru a realiza amplificarea unui fascicul de radiații optice. Realizarea acestei condiții se numește: *inversia populațiilor*.

3.5 Inversia populației

Pentru un ansamblu de sisteme cuantice, pentru simplitatea calculului, presupunem că gradele de degenerare ale nivelurilor energetice (Figura 3.1) sunt egale cu unitatea:

$$g_0 = g_1 = g_2 = \dots = g_i = 1 \quad (3.32)$$

Dacă ne referim doar la două niveluri (de exemplu 1 și 2), datorită egalității coeficienților Einstein ce descriu procesele forțate (emisii stimulate și absorbția)

$$B_{21} = B_{12} \quad (3.33)$$

inversia populațiilor nu este posibilă deoarece ambele fenomene decurg cu aceeași probabilitate. Este nevoie de luare în considerare a cel puțin 3 niveluri energetice, cu timpi de viață net diferiți astfel încât inversia populațiilor să fie realizabilă.

3.5.1 Schema cu trei niveluri energetice

Considerăm un ansamblu de n_V sisteme cuantice descrise din punct de vedere energetic prin diagrama din Figura 3.5. Sursa de excitare sau pompajul optic este asigurat de un câmp electromagnetic extern, de densitate ρ_p , ce realizează rezonant procese de absorbție de pe nivelul fundamental, nivelul 0, pe nivelul 2. După un timp mediu de viață (τ_2) specific nivelului 2 au loc procese de relaxare pe nivelul intermediar 1 și ulterior, revenire pe nivelul fundamental prin tranziții stimulate. Inițial presupunem $n_0 = n_V$, $n_1 = n_2 = 0$ și imediat după aplicarea pompajului evoluția populațiilor este descrisă de

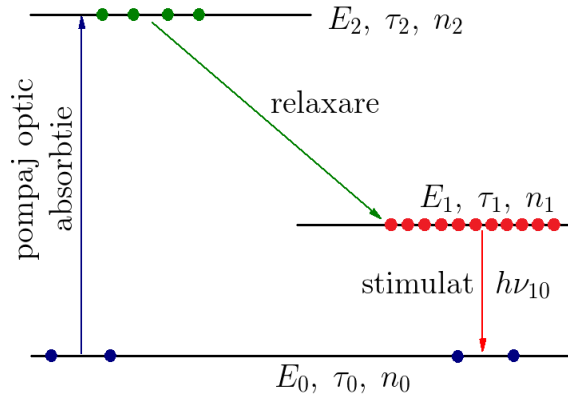


Figura 3.5: Schema LASER cu trei niveluri energetice

setul de ecuații cinetice:

$$\begin{aligned} \frac{dn_2}{dt} &= \rho_p B_{02} n_0 - \rho_p B_{20} n_2 - n_2 \left(\frac{1}{\tau_{21}} - \frac{1}{\tau_{20}} \right) \\ \frac{dn_1}{dt} &= \rho B_{01} n_0 - \rho B_{10} n_1 + \frac{n_2}{\tau_{21}} - \frac{n_1}{\tau_{10}} \\ n_V &= n_0 + n_1 + n_2 \text{ sau } \frac{dn_0}{dt} + \frac{dn_1}{dt} + \frac{dn_2}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

unde ρ este densitatea optică a câmpului emis stimulat. Termeni din ecuațiile

Alăturati de mai sus sunt specifici fenomenelor de absorbție, emisie spontană și emisie **fiecărui termen** stimulat, alături de coeficienții Einstein aferenți. La funcționarea unui sistem **fenomenul enumerat.** laser, valoarea densității optice ρ a câmpului stimulat este o mărime ce indică

puterea laser generată. În continuare ne interesează condiția staționară la care

se atinge condiția de inversie a populațiilor, condiție la care densitatea optică

este mică, $\rho \approx 0$. În condiția staționară, sistemul precedent de 3 ecuații se

simplifică astfel:

$$\begin{aligned} \frac{dn_2}{dt} &= \rho_p B_{02} n_0 - \rho_p B_{20} n_2 - \frac{n_2}{\tau_2} = 0 \\ \frac{dn_1}{dt} &= \frac{n_2}{\tau_{21}} - \frac{n_1}{\tau_{10}} = 0 \\ n_V &= n_0 + n_1 + n_2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

unde τ_2 reprezintă timpul total de viață a nivelului 2. Cele 3 soluții ale sistemului sunt date de expresiile:

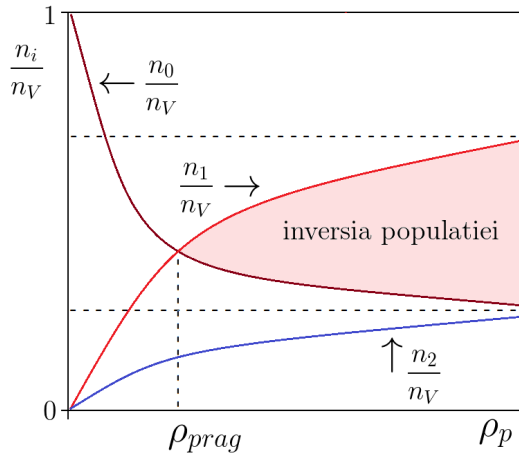
$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{\tau_{21}n_V}{\tau_{10} + 2\tau_{21} + \frac{\tau_{21}}{\tau_2\rho_p B_{20}}} \\ n_1 &= \frac{\tau_{10}n_V}{\tau_{10} + 2\tau_{21} + \frac{\tau_{21}}{\tau_2\rho_p B_{20}}} \\ n_0 &= \left(\tau_{21} + \frac{\tau_{21}}{\tau_2\rho_p B_{20}} \right) \frac{n_V}{\tau_{10} + 2\tau_{21} + \frac{\tau_{21}}{\tau_2\rho_p B_{20}}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Presupunem că dispunem de o sursă externă de pompaj cu densitatea optică foarte mare, astfel încât putem considera $\rho_p \rightarrow \infty$, caz în care, soluțiile precedente tind către valorile extreme ale populațiilor atinse, astfel

dacă $\rho_p \rightarrow \infty$ atunci:

$$\begin{aligned} n_0, n_2 &\rightarrow \frac{\tau_{21}n_V}{\tau_{10} + 2\tau_{21}} \\ n_1 &\rightarrow \frac{\tau_{10}n_V}{\tau_{10} + 2\tau_{21}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

cu reprezentarea lor grafică în Figura 3.6.



Puterea laser crește liniar cu densitatea de pompaj?

Figura 3.6: Realizarea inversiei pentru schema cu trei niveluri energetice

Se pot identifica ușor două concluzii importante referitoare la realizarea inversiei populației în schema cu trei niveluri energetice:

- inversia populației, $n_1 > n_0$, se obține doar dacă $\tau_{10} > \tau_{21}$;

- pompajul optic extern trebuie să depășească o valoare de prag ρ_{prag} pentru a obține inversia.

Observația 3.8. La construirea unui sistem laser, în vederea realizării inversiei, sunt selectate acele tipuri de sisteme cuantice care au un nivel metastabil. Chiar dacă ar exista un al patrulea nivel superior, schema de funcționare se reduce la schema echivalentă cu trei niveluri energetice.

3.5.2 Schema cu patru niveluri energetice

Considerăm același ansamblu de n_V sisteme cuantice descrise din punct de vedere energetic de patru niveluri energetice reprezentate în diagrama din Figura 3.7. Pompajul optic este asigurat de un câmp electromagnetic extern, de densitate ρ_p , ce realizează selectiv procese de absorbție de pe nivelul fundamental 0, pe nivelul 3. Presupunem că nivelul 2 este metastabil (τ_2 mare) iar nivelurile 3 și 1 au un timp de viață mic. Inițial presupunem starea staționară $n_0 = n_V$, $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ și imediat după aplicarea pompajului evoluția populațiilor este descrisă ecuațiile cinetice:

$$\begin{aligned}
 \frac{dn_3}{dt} &= \rho_p B_{03} n_0 - \rho_p B_{30} n_3 - \frac{n_3}{\tau_3} \\
 \frac{dn_2}{dt} &= \rho B_{12} n_1 - \rho B_{21} n_2 + \frac{n_3}{\tau_3} - \frac{n_2}{\tau_2} \\
 \frac{dn_1}{dt} &= \rho B_{21} n_2 - \rho B_{12} n_1 + \frac{n_2}{\tau_2} - \frac{n_1}{\tau_1} \\
 n_V &= n_0 + n_1 + n_2 + n_3 \text{ sau } \frac{dn_0}{dt} + \frac{dn_1}{dt} + \frac{dn_2}{dt} + \frac{dn_3}{dt} = 0
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

unde ρ este densitatea optică a câmpului emis stimulat. Ne interesează condiția staționară la care densitatea optică a radiației emise stimulat este mică, $\rho \approx 0$, condiție la care sistemul precedent de 4 ecuații se simplifică

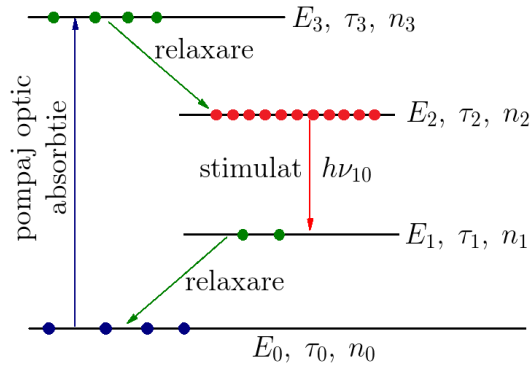


Figura 3.7: Schema LASER cu patru niveluri energetice

astfel:

$$\begin{aligned} \frac{dn_3}{dt} &= \rho_p B_{30} (n_0 - n_3) - \frac{n_3}{\tau_3} = 0 \\ \frac{dn_2}{dt} &= \frac{n_3}{\tau_3} - \frac{n_2}{\tau_2} = 0 \\ \frac{dn_1}{dt} &= \frac{n_2}{\tau_2} - \frac{n_1}{\tau_1} = 0 \\ n_V &= n_0 + n_1 + n_2 + n_3 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Populațiile celor 4 niveluri au soluțiile staționare cu forma:

$$\begin{aligned} n_3 &= \frac{\tau_3 n_V}{\tau_1 + \tau_2 + 2\tau_3 + \frac{1}{\rho_p B_{30}}} \\ n_2 &= \frac{\tau_2 n_V}{\tau_1 + \tau_2 + 2\tau_3 + \frac{1}{\rho_p B_{30}}} \\ n_1 &= \frac{\tau_1 n_V}{\tau_1 + \tau_2 + 2\tau_3 + \frac{1}{\rho_p B_{30}}} \\ n_0 &= \frac{\left(\tau_3 + \frac{1}{\rho_p B_{30}} \right) n_V}{\tau_1 + \tau_2 + 2\tau_3 + \frac{1}{\rho_p B_{30}}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Consider $\tau_2 > \tau_1$ și din reprezentarea grafică (Figura 3.8) a acestor soluții funcție de densitatea de pompaaj extern, se pot identifica două concluzii importante :

- inversia populației, $n_2 > n_1$, se obține doar dacă $\tau_2 > \tau_1$;
- inversia populației se obține imediat ce pompajul extern este aplicat și nu este un proces cu prag ca în cazul schemei cu 3 niveluri energetice.

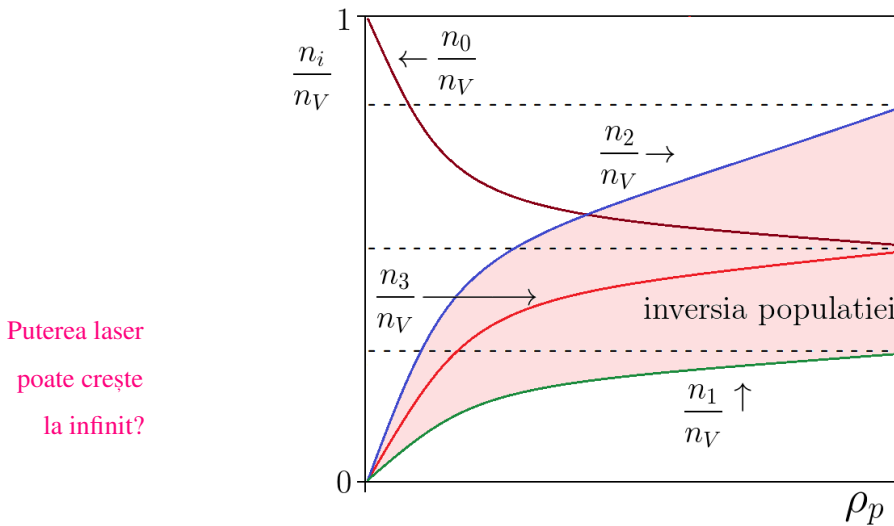


Figura 3.8: Realizarea inversiei pentru schema cu patru niveluri energetice

Observația 3.9. Tranziția laser se realizează între nivelul metastabil (nivel superior laser) și un nivel inferior, cu timp de viață scurt (nivel inferior laser). Chiar dacă ar exista alte niveluri intermediare între 0 și 1 sau mai sus de nivelul 4, schema se reduce la o schemă echivalentă cu patru niveluri de energie.

Capitolul 4

Rezonatorul optic

Se cunoaște faptul că fasciculele laser sunt bine colimate și deci au un grad de divergență mic. Această colimare se datorează, așa cum vom vedea, rezonatorului optic și matematic putem presupune că radiația laser poate fi descrisă printr-un *fascicul paraxial* de radiație în care unghiul de divergență $\theta < 5^\circ$. Presupunem o simetrie circulară a fasciculului ce se propagă în lungul axei z (Figura 4.1) și reprezentativ, ne referim la o singură rază din fascicul. Dacă la coordonata z_1 , poziția razei este $r(z_1)$ iar la o coordonată ulterioară z_2 , poziția razei este $r(z_2)$ atunci unghiul de divergență este descris de expresia:

$$\tan \theta = \frac{r(z_2) - r(z_1)}{z_2 - z_1} \quad (4.1)$$

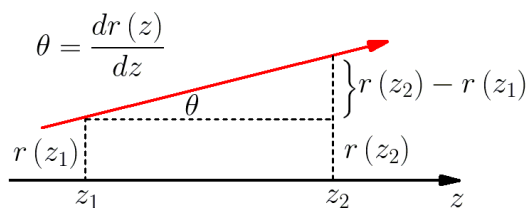


Figura 4.1: Fascicul paraxial de divergență θ .

În aproximația paraxială relația precedentă devine:

$$\theta \approx \frac{r(z_2) - r(z_1)}{z_2 - z_1} \quad (4.2)$$

Există noțiunea de rază de lumină curbă? Dacă unghiul θ variază cu coordonata z , similar cu panta graficului funcției, expresia generală a divergenței fasciculului paraxial are forma diferențială:

$$\theta = \frac{dr(z)}{dz} \quad (4.3)$$

4.1 Ecuația Helmholtz a fasciculelor paraxiale

Suntem interesați de maparea distribuției intensității câmpului electric într-un fascicul paraxial. Nu ne interesează starea de polarizare a fasciculului și ca urmare vom folosi ecuații scalare. Considerăm că mediul prin care se propagă fasciculul este unul dielectric astfel încât efectele magnetice induse de componenta magnetică a câmpului electromagnetic sunt neglijabile. Suntem interesați de efectele fenomenelor de interferență și difracție, ca urmare folosim natura ondulatorie a intensității câmpului electric a cărei ecuație de propagare este de forma:

$$\nabla^2 e(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 e(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.4)$$

Într-un punct dat din spațiul de propagare a fasciculului, considerăm o evoluție armonică în timp a intensității câmpului și propunem ca soluție a ecuației de undă:

$$e(x, y, z, t) = \tilde{E}(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (4.5)$$

unde $\tilde{E}(x, y, z)$ se numește fazor și conține informații atât despre amplitudine cât și despre faza câmpului. Introducând această soluție în ecuația de undă obținem ecuația independentă de timp a amplitudinii complexe a intensității câmpului electric, cunoscută și sub forma de ecuația lui Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2) \tilde{E}(x, y, z) = 0 \text{ unde } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (4.6)$$

Rezolvăm această ecuație generală a amplitudinii intensității câmpului electric pentru trei cazuri particulare pentru care știm spațial modul de evoluție al fazei unde.

4.1.1 Unda plană – soluție a ecuației Helmholtz

Cel mai simplu model de descriere a evoluției spațiale a fazei unei unde este modelul unde plane. Acest model presupune forma frontului de undă, numit și front de fază constantă, sub forma unui plan perpendicular pe direcția de propagare indicată prin vectorul de undă \vec{k} (Figura 4.2).

Dați exemple de unde plane.

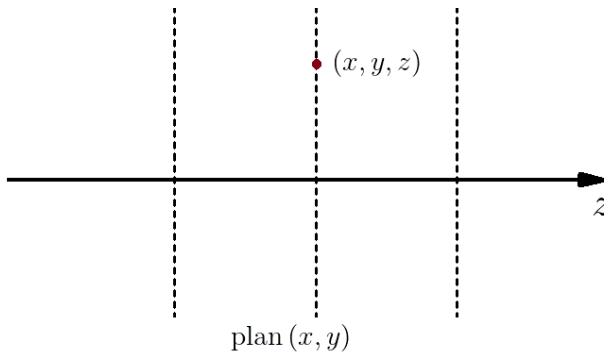


Figura 4.2: Forma plană a frontului de fază constantă (unda plană).

Intensitatea câmpului electric este constantă în orice plan (x, y) din spațiul de propagare a unei unde plane deoarece faza este constantă în acel plan. Soluția ecuației Helmholtz pentru orice punct (x, y, z) din planul ales (Figura 4.2) are forma:

$$\tilde{E}(x, y, z) = E_0 e^{-ikz} \quad (4.7)$$

De la un plan la altul, intensitatea câmpului electric variază armonic odată cu creșterea lui z , distanța dintre două maxime consecutive fiind egală cu lungimea de undă.

4.1.2 Unda sferică – soluție a ecuației Helmholtz

Frontul de fază și amplitudinea undei sunt constante pe suprafața unei sfere ce înconjoară sursa, dar de la o sferă la alta (Figura 4.3), amplitudinea nu rămâne constantă ca în cazul undei plane, ci descrește liniar cu raza sferei. În planul (x, y) unda sferică cu frontul de rază R atinge punctul $(0, 0, R)$ iar expresia intensității câmpului electric în acest punct are expresia:

$$\tilde{E}(0, 0, R) = \frac{E_0}{R} e^{-ikR} \quad (4.8)$$

În oricare alt punct (x, y, R) din același plan, unda va avea o amplitudine mai mică și o fază diferită, cu raza r , expresia intensității câmpului electric în acest punct ia forma:

$$\tilde{E}(x, y, R) = \frac{E_0}{r} e^{-ikr} \quad (4.9)$$

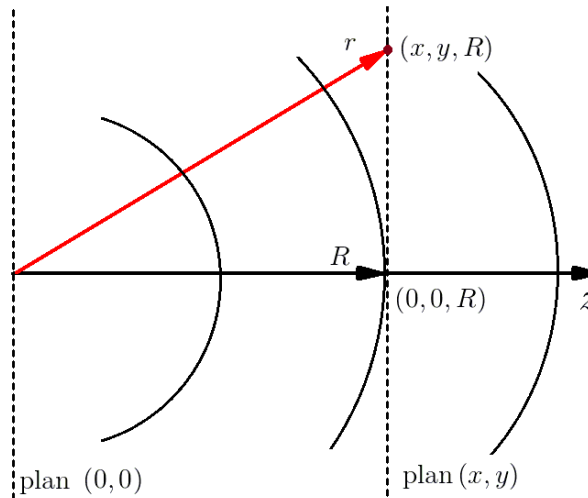


Figura 4.3: Forma sferică a frontului de fază constantă (unda sferică).

Vectorul de poziție r are lungimea:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + R^2} = R \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}} = R \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

iar în aproximația paraxială, punctul (x, y, R) se află în imediata vecinătate a axei optice astfel încât putem face aproximația $\frac{x^2 + y^2}{R^2} \ll 1$. Ca urmare putem

aproxima valoarea lui r conform dezvoltării în serie Taylor:

$$r \approx R \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) = R + \frac{x^2 + y^2}{2R} \quad (4.11)$$

Introducem această aproximație în expresia unei sferice exprimată prin intensitatea câmpului electric în punctul (x, y, R) :

$$\tilde{E}(x, y, R) = \frac{E_0}{r} e^{-ikR} e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2R}} \quad (4.12)$$

Exercițiu 4.1. În expresia de mai sus, identificați termenul responsabil de simetria circulară a fasciculului paraxial.

Într-un punct oarecare (x, y, z) de vector de poziție r , expresia generală a intensității câmpului ia forma:

$$\tilde{E}(x, y, z) = \frac{E_0}{r} e^{-ikz} e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2z}} \quad (4.13)$$

Observația 4.1. Pentru un fascicul paraxial, bine colimat și îngust, departe de sursa optică, de exemplu un fascicul laser, intensitatea câmpului electric ia forma:

$$\tilde{E}(x, y, z) = \frac{E_0}{z} e^{-ikz} \quad (4.14)$$

și ca urmare, variația fazei fasciculului este similară cazului unei plane. Din acest punct de vedere, un fascicul laser este considerat exemplul real cel mai apropiat de modelul sursei plane.

4.1.3 Unda complexă – soluție a ecuației Helmholtz

Realitatea fizică confirmă faptul că cele două modele, unda sferică și unda plană, sunt rar întâlnite în natură. De exemplu, lumina Soarelui, la suprafața Pământului poate fi considerat un fascicul de raze paralele, bine colimat dar nu respectă condiția unei plane, condiție de fază constantă

într-un plan perpendicular pe direcția de propagare. În realitate, în apropierea fiecărui plan din spațiul de propagare, faza undei este constantă pe o suprafață cutată, ca suprafața unui cearșaf întins dar puțin boțit (Figura 4.4). Cu aceste considerente, expresia intensității câmpului electric într-un punct oarecare din planul (x, y) poate fi descrisă printr-o ecuație similară undei plane:

$$\tilde{E}(x, y, z) = \tilde{u}(x, y, z) e^{-ikz} \quad (4.15)$$

dar cu o amplitudine complexă $\tilde{u}(x, y, z)$ ce se modifică ușor de la punct la punct în planul (x, y) , exprimând "micile cute ale cearșafului boțit". Introducând această soluție în ecuația Helmholtz, obținem ecuația generală a amplitudinii intensității câmpului electric dintr-un fascicul paraxial:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z)}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z)}{\partial z^2}}_{\approx 0 \text{ aprox. paraxială}} - 2ik \frac{\partial \tilde{u}(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad (4.16)$$

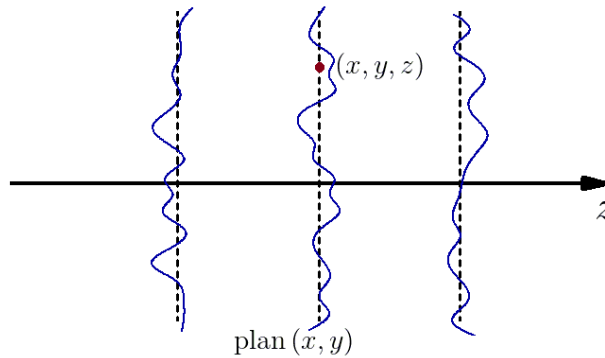


Figura 4.4: Forma complexă a frontului de fază constantă (unda complexă).

Exercițiu 4.2. Cărui fenomen optic poate fi atribuită această variație mică și aleatoare a fazei într-un plan din spațiul de propagare?

4.1.4 Fascicul gaussian-sferic

Presupunem un fascicul paraxial (ușor divergent) cu simetrie circulară în planul (x, y) ce se propagă printr-un mediu dielectric în lungul axei z ce are

două proprietăți distincte:

- energia transportată este maximă pe axa de simetrie a fascicului și în planul (x,y) scade radial după o distribuție de tip Gauss;
- fasciculul are un grad de coerență ridicat iar frontul de fază constantă (frontul de undă) este sferic

Observația 4.2. Prin definiție, un fascicul optic ce îndeplinește ambele condiții referitoare la distribuția radială a energiei de tip Gauss și front de undă sferic sus se numește fascicul gaussian-sferic. (Figura 4.5)

Chiar dacă fasciculul este ușor divergent (Figura 4.5) forma gaussiană a distribuției radiale se păstrează în lungul axei de propagare z , condiție impusă de legea de conservare a energiei. Ariile celor două gaussiene, la pozițiile z_0 și z sunt egale iar amplitudinea axială a intensității fascicului scade odată cu creșterea lui z .

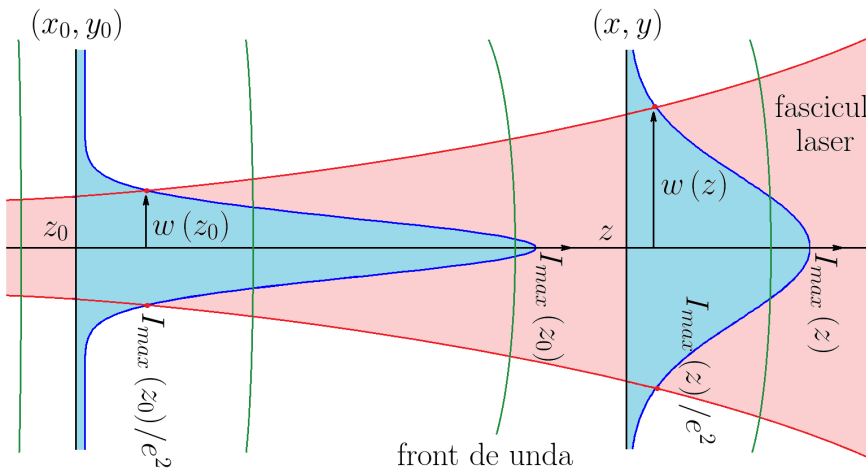


Figura 4.5: Fascicul gaussian-sferic.

Intuitiv vine întrebarea: cum definim diametrul sau raza fascicului măsurată într-un plan oarecare (x,y) din spațiul de propagare? Dacă într-un plan oarecare (x,y) așezăm un ecran, datorită simetriei circulare presupuse

a fasciculului, vom observa o zonă luminoasă, de formă circulară, numită *spot*. Se alege raza spotului, notată cu $w(z)$ (Figura 4.5) distanța măsurată de la axa optică unde intensitatea este maximă până la poziția radială în care intensitatea e scade de e^2 ori sau altfel spus, distanța radială la care

De ce doar de e ori? intensitatea câmpului electric scade de e ori.

Observația 4.3. Raza spotului $w(z)$ crește odată cu creșterea lui z iar condiția de conservare a energiei totale transportată de fascicul determină o micșorare a densității de flux (W/m^2). Pe scurt, spotul crește în dimensiune odată cu diminuarea intensității sale.

Pe baza acestor considerente, putem propune o distribuție gaussiană a energiei radiale transportate de fascicul, energie exprimată prin intensitatea totală (exprimată în Watt) de forma:

\propto - proporțional

$$I(x, y, z) \propto \left| \tilde{E}(x, y, z) \right|^2 \exp\left(-\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2}\right) \quad (4.17)$$

unde termenul exponențial indică simetria circulară din planul (x, y) . Așa cum am văzut anterior, intensitatea câmpului electric $\tilde{E}(x, y, z)$ ce descrie o undă complexă este de forma:

$$\tilde{E}(x, y, z) = \tilde{u}(x, y, z) e^{-ikz}$$

Propunem pentru amplitudinea complexă a undei $\tilde{u}(x, y, z)$ forma [7]:

$$\tilde{u}(x, y, z) \propto \exp\left(-\frac{ik(x^2 + y^2)}{2\tilde{q}(z)}\right) \exp(-i\tilde{p}(z)) \quad (4.18)$$

unde $\tilde{q}(z)$ reprezintă raza de curbură complexă a frontului de undă iar $\tilde{p}(z)$ este faza complexă a undei. Expresiile mărimilor $\tilde{q}(z)$ și $\tilde{p}(z)$ sunt necunoscute ce vor fi determinate impunând ca expresia propusă pentru $\tilde{u}(x, y, z)$ să satisfacă ecuația de propagare a unui fascicul paraxial (ecuația Helmholtz):

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z)}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \tilde{u}(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad (4.19)$$

Pentru soluția propusă $\tilde{u}(x, y, z)$, derivatele parțiale ale amplitudinii complexe sunt de forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} &\propto - \left[\frac{ik}{\tilde{q}(z)} - \frac{k^2 x^2}{\tilde{q}^2(z)} \right] \exp \left(-\frac{ik(x^2 + y^2)}{2\tilde{q}(z)} - i\tilde{p}(z) \right) \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} &\propto - \left[\frac{ik}{\tilde{q}(z)} - \frac{k^2 y^2}{\tilde{q}^2(z)} \right] \exp \left(-\frac{ik(x^2 + y^2)}{2\tilde{q}(z)} - i\tilde{p}(z) \right) \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} &\propto -i \left[\frac{d\tilde{p}(z)}{dz} - \frac{k(x^2 + y^2)}{2\tilde{q}^2(z)} - \frac{d\tilde{q}(z)}{dz} \right] \exp \left(-\frac{ik(x^2 + y^2)}{2\tilde{q}(z)} - i\tilde{p}(z) \right) \end{aligned}$$

și care introduse în ecuația Helmholtz, conduc la identitatea:

$$\left\{ \frac{k^2(x^2 + y^2)}{\tilde{q}^2(z)} \left[\frac{d\tilde{q}(z)}{dz} - 1 \right] + 2k \left[\frac{d\tilde{p}(z)}{dz} + \frac{i}{\tilde{q}(z)} \right] \right\} \tilde{u}(x, y, z) = 0 \quad (4.20)$$

Egalitatea cu zero implică rezolvarea a două ecuații caracteristice:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{q}(z)}{dz} &= 1 \\ \frac{d\tilde{p}(z)}{dz} &= -\frac{i}{\tilde{q}(z)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Integrarea acestor ecuații de-a lungul axei optice se face de la condiția inițială a coordonatei $z = 0$ la un z oarecare și pentru $z = 0$ notez $\tilde{q}(z = 0) = \tilde{q}_0$:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(z) &= z + \tilde{q}_0 \\ d\tilde{p}(z) &= -\frac{i}{\tilde{q}(z)} dz = -i \frac{d\tilde{q}(z)}{\tilde{q}(z)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

sau

$$\begin{aligned} \tilde{q}(z) &= z + \tilde{q}_0 \\ \tilde{p}(z) &= -i \ln \tilde{q}(z) + c \end{aligned} \quad (4.23)$$

unde constanta de integrare c trebuie determinată din condiția inițială. Presupunem că faza unei complexe este *zero* la poziția $z = 0$, adică $\tilde{p}(z = 0) = 0$ și deci constanta c are expresia:

$$c = i \ln \tilde{q}_0 \quad (4.24)$$

Noul sistem de ecuații caracteristice devine:

$$\begin{aligned}\tilde{q}(z) &= z + \tilde{q}_0 \\ \tilde{p}(z) &= -i(\ln \tilde{q}(z) - \ln \tilde{q}_0) = -i \ln \frac{\tilde{q}(z)}{\tilde{q}_0} = -i \ln \frac{z + \tilde{q}_0}{\tilde{q}_0}\end{aligned}\quad (4.25)$$

Rezolvarea acestui sistem implică asumarea unei condiții referitoare la raza de curbură complexă a frontului de undă. Presupunem că frontul de undă este sferic, cu raza de curbură $R(z)$ ce reprezintă partea reală a mărimii $\tilde{q}(z)$, alături de partea imaginară $q_i(z)$:

$$\frac{1}{\tilde{q}(z)} \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{1}{R(z)} - i \frac{1}{q_i(z)} \quad (4.26)$$

Revenind la expresia amplitudinii complexe a undei ce conține informații despre forma frontului de undă și ținând cont de expresia vectorului de undă $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, putem rescrie $\tilde{u}(x, y, z)$ astfel:

$$\tilde{u}(x, y, z) \propto \exp\left(-\frac{i\pi(x^2 + y^2)}{\lambda R(z)} - \frac{\pi(x^2 + y^2)}{\lambda q_i(z)}\right) \quad (4.27)$$

Pe de altă parte, forma standard a funcției de distribuție Gauss [8], cu simetrie circulară în planul (x, y) este de forma:

$$f_{\text{Gauss}}(x, y) = f(0) \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{w^2(z)}\right) \quad (4.28)$$

unde $w(z)$ reprezintă distanța față de centrul de simetrie la care amplitudinea gaussienei scade de e ori. Prin compararea argumentului exponențialei din ultimele două ecuații și separarea părților reale și imaginare, deducem expresia $q_i(z)$ astfel că raza de curbură complexă devine:

$$\frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (4.29)$$

ecuație ce descrie un fascicul gaussian-sferic, cu formă circulară a spotului numit *mod fundamental Gauss*.

Revenind la necesitatea integrării sistemului de ecuații caracteristice, alegem drept condiție inițială a formei reale a frontului de undă, în planul

(x, y) la poziția:

$$z = 0, R(0) = \infty \quad (4.30)$$

adică la poziția $z = 0$, unda este perfect plană. Cu aceasta nouă presupunere, faza complexă a undei în condițiile inițiale are forma:

$$\frac{1}{\tilde{q}_0} = -i \frac{\lambda}{\pi w_0^2} \quad (4.31)$$

unde $w(z=0) = w_0$ și reprezintă raza spotului la centru. Aceste rezultat îl introducem în sistemul de ecuații caracteristice prin următorul artificiu matematic:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{q}(z)} &= \frac{1}{z + \tilde{q}_0} = \frac{1}{\tilde{q}_0 \left(1 + \frac{z}{\tilde{q}_0}\right)} = \\ &= \frac{\frac{1}{\tilde{q}_0}}{1 + \frac{z}{\tilde{q}_0}} = \frac{-i \frac{\lambda}{\pi w_0^2}}{1 - i \frac{z\lambda}{\pi w_0^2}} = \\ &= \frac{\frac{1}{z} \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2} + i \frac{\frac{\lambda}{\pi w_0^2}}{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2} \equiv \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Prin egalarea părților reale și imaginare, se determină expresiile dependenței razei frontului de undă $R(z)$ și a razei spotului $w(z)$, funcție de poziția z , valori definitorii pentru descrierea analitică a unui fascicul gaussian-sferic.

Observația 4.4. Raza frontului de undă $R(z)$ și raza spotului $w(z)$ caracteristice *modului fundamental Gauss*:

$$R(z) = z + \frac{1}{z} \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)^2 \quad (4.33)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2} \quad (4.34)$$

4.1.5 Caracteristicile modului fundamental Gauss

Am presupus că fasciculul gaussian are o simetrie circulară și este ușor divergent iar la poziția $z = 0$, raza spotului w_0 atinge valoarea minimă (Figura 4.6) și se numește *talie*. La o poziție oarecare z raza spotului crește și definim distanța z_R la care aria spotului de dublează, adică:

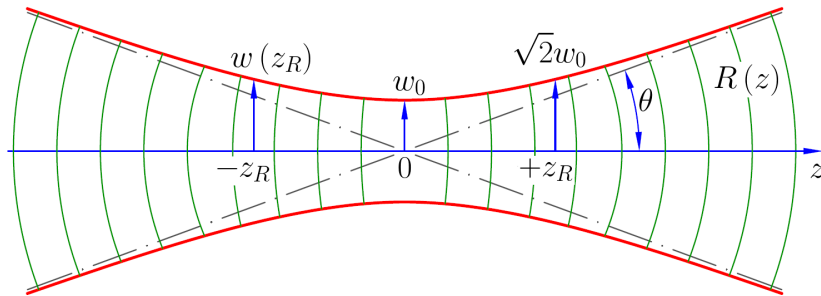
$$\pi w^2(z_R) = 2\pi w_0^2 \quad (4.35)$$

Lord Rayleigh

(1842-1919) unde z_R definește *domeniul Rayleigh* în care fasciculul gaussian poate fi

Premiul Nobel considerat un fascicul de raze aproape paralele.

Fizică 1904.



– Profilul intensitatii (Gauss) scade radial de e^2 ori

Figura 4.6: Fascicul gaussian-sferic.

Ținând cont de definiția domeniului Rayleigh, raza frontului de undă $R(z)$ și raza spotului $w(z)$, funcție de poziția z devin:

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \quad (4.36)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (4.37)$$

$$\text{unde } z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (4.38)$$

Domeniul Rayleigh z_R depinde de lungimea de undă a fasciculului de radiații optice cât și de talia fasciculului w_0 care în cele mai multe situații practice se situează în interiorul sistemului optic. În Figura 4.7 am reprezentat dependența distanței z_R funcție de lungimea de undă, pentru două valori

curent utilizate ale taliei fasciculului, alese drept parametri. Cu cât lungimea de undă este mai mică (de exemplu domeniul albastru) fasciculul poate fi aproximat ca având raze *aproape paralele* pe distanțe de ordinul sutelor de metri.

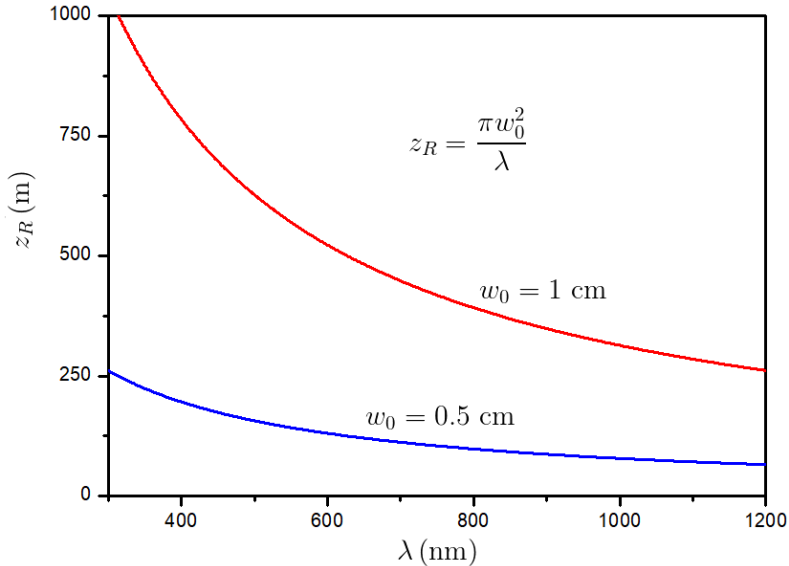


Figura 4.7: Dependența domeniul Rayleigh de lungimea de undă.

Divergența fasciculului exprimată prin tangenta unghiului θ (Figura 4.6) poate fi aproximată pentru $z \gg z_R$ prin:

$$\tan \theta = \frac{w(z)}{z} \approx \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (4.39)$$

Acest rezultat subliniază faptul că un fascicul monocromatic diverge cu atât mai repede cu cât talia sursei fasciculului w_0 este mai mică. Același rezultat poate fi observat și în Figura 4.8 ce descrie dependența rezei spotului funcție de poziția z , cu w_0 ales drept parametru. Se observă că dimensiunea spotului rămâne relativ constantă pe distanțe de ordinul zecilor de metri însă ulterior fasciculul diverge cu atât mai rapid cu cât talia sursei optice w_0 este mai mică.

Exemplu 4.1. Misiunile Apollo începute în anii '60 cât și dezvoltarea primelor sisteme laser au permis măsurarea distanței Pământ – Lună cu o precizie de 15 cm. Primele măsurători au fost realizate evaluând durata în care lumina parcurge dublul distanței Pământ – Lună folosind un laser pulsant cu rubin (694.3 nm) ce se reflectă la suprafața Lunii [9] pe o oglindă specială numită: *Lunar Ranging Retro Reflectors (LRRRs)*. Chiar dacă inițial fasciculul laser este bine colimat, datorită distanței mari, la suprafața Lunii, fasciculul are un diametru de aproximativ 3.2 km.

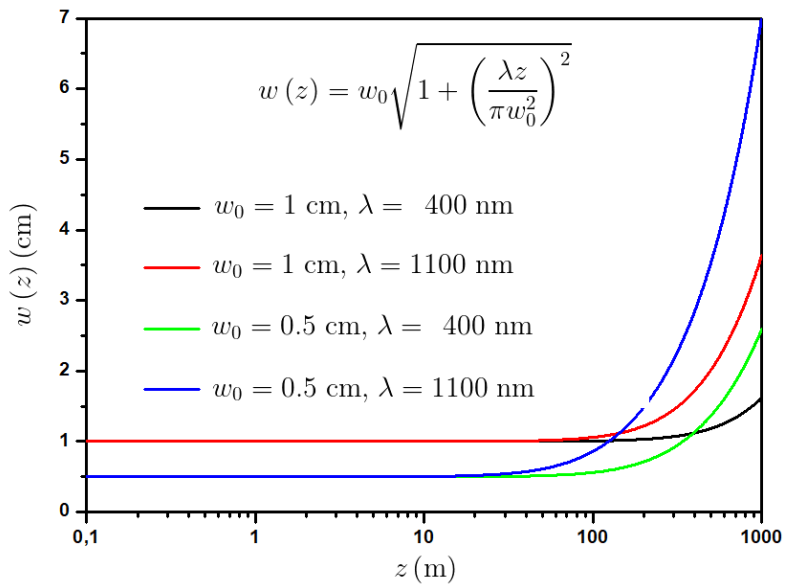


Figura 4.8: Dependența razei spotului funcție de poziția sursei optice.

Revenind la expresia razei de curbură a frontului de undă $R(z)$ reprezentată grafic funcție de poziția z (Figura 4.9), distingem câteva cazuri particulare:

$$z = \begin{cases} 0 \Rightarrow R(z) = \infty & \text{undă plană} \\ z_R \Rightarrow R(z) = 2z_R & \text{valoarea minimă} \\ \infty \Rightarrow R(z) = z & \text{undă "aproape" plană} \end{cases} \quad (4.40)$$

Observația 4.5. Chiar dacă valoarea razei frontului de undă $R(z)$ se modifică în lungul lui z , ea nu coboară sub valoarea minimă $2z_R$ (sute de metri). Datorită acestei proprietăți, fasciculul gaussian-sferic se apropie cel mai mult de definiția teoretică a sursei plane, cu raza de curbură infinită.

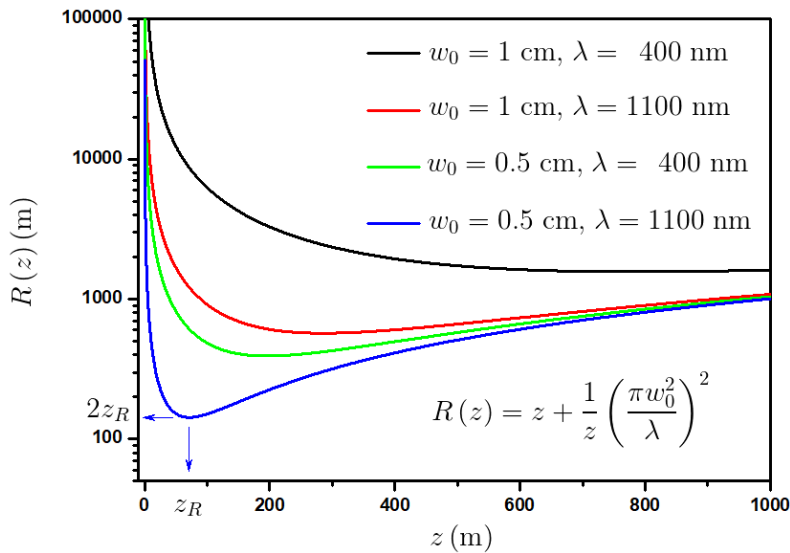


Figura 4.9: Dependența razei frontului de undă (front de fază constantă) funcție de poziția sursei optice.

În domeniul Rayleigh, $-z_R < z < +z_R$, considerat "fascicul de raze paralele", raza frontului de undă are valori foarte mari (Figura 4.9), de ordinul miilor de metri, astfel încât putem aproxima cu ușurință un fascicul laser cu o sursă plană.

Propagarea fasciculului gaussian-sferic implică și o modificare a fazei pentru care am presupus drept condiție inițială: la poziția $z = 0$, faza complexă $\tilde{p}(z)$ este zero. Revenind la setul de ecuații caracteristice, detaliem parametrul $\tilde{p}(z)$ astfel:

$$\begin{aligned} \exp(-i\tilde{p}(z)) &= \exp\left(-\ln \frac{z+\tilde{q}_0}{\tilde{q}_0}\right) = \frac{\tilde{q}_0}{z+\tilde{q}_0} = \frac{1}{1+\frac{z}{\tilde{q}_0}} = \\ &= \frac{1}{1-i\frac{z}{z_R}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2}} \exp(\varphi(z)) \end{aligned} \quad (4.41)$$

unde faza fasciculului gaussian-sferic $\varphi(z)$ la propagarea în lungul axei z este:

$$\varphi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \quad (4.42)$$

numită și *fază Gouy*, cu reprezentarea sa grafică în Figura 4.10. De remarcat este faptul că în domeniul Rayleigh, $-z_R < z < +z_R$, evoluția fazei funcție de distanța de propagare este aproape liniară, iar la distanțe foarte mari ea tinde asimptotic la valoare $\pi/2$.

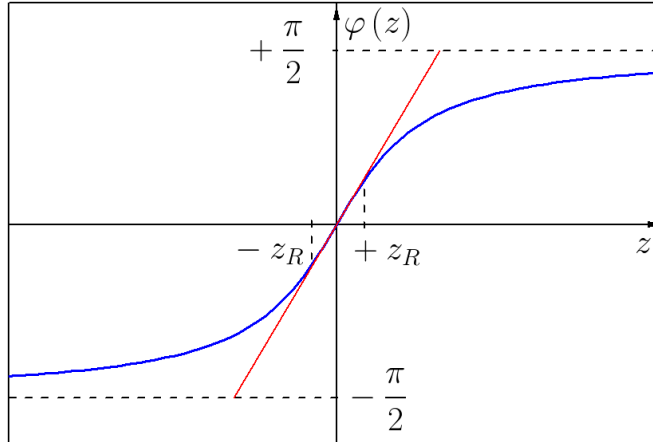


Figura 4.10: Evoluția fazei fasciculului la propagarea în lungul axei z .

Observația 4.6. Încă din secolul trecut Louis Georges Gouy (1854–1926) a prezis acest efect de salt de fază de π radiani, situație similară cazului în care fasciculul este focalizat de o lentilă iar saltul π radiani are loc la trecerea prin focar.

4.1.6 Focalizarea fasciculelor gaussian-sferice

Pentru a reduce dificultatea calculului, vom considera cazul *lentilelor subțiri* pentru care poziția imaginii z_2 se determină funcție de distanța focală f și poziția obiectului z_1 , aplicând binecunoscuta formulă:

$$\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} = \frac{1}{f} \quad (4.43)$$

Problema focalizării pare una simplă datorită faptului că divergența fasciculelor gaussian-sferice θ este foarte mică. Cel puțin în domeniul Rayleigh ($-z_R < z < +z_R$), paralelismul fascicului este foarte bun și practic $z_2 \approx f$ (Figura 4.11). Însă dificultatea majoră se referă la conservarea proprietății de fascicul gaussian-sferic după propagarea prin lentilă. În 1983, Sidney Self [10] aduce o corecție de calcul a formulei lentilelor subțiri impunând condiția de conservare menționată:

$$\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1 + \frac{z_R^2}{z_1 + f}} = \frac{1}{f} \quad (4.44)$$

unde z_R este poziția la care aria fascicului se dublează, comparativ cu talia fascicului w_0 din sursă. Practic înălțimea obiectului este chiar w_0 și după focalizare, înălțimea imaginii este w_f (Figura 4.11), fascicului menținându-și proprietatea gaussiano-sferică.

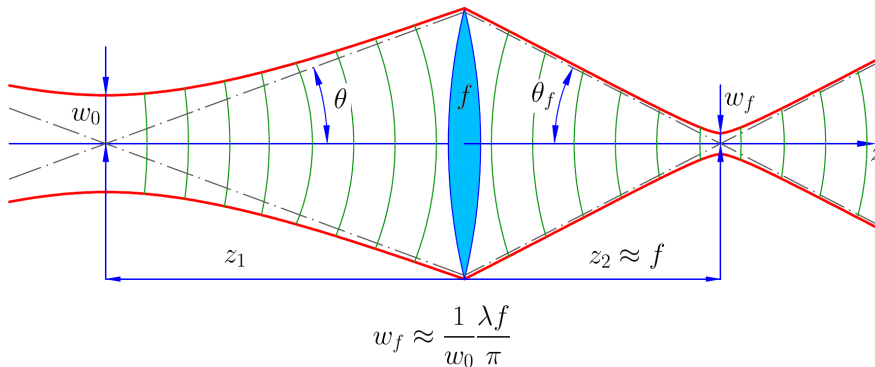


Figura 4.11: Focalizarea fasciculelor gaussian-sferice.

Utilizând expresia măririi linear transversale pentru cazul lentilelor subțiri:

$$M = \frac{w_f}{w_0} = \frac{z_2}{z_1} \quad (4.45)$$

care introdusă în formula lentilelor cu corecția de fascicul gaussian-sferic, putem determina raza spotului de focalizare prin lentilă:

$$w_f = \frac{1}{w_0} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{z_1}{f}\right)^2 + \left(\frac{z_R}{f}\right)^2}} \quad (4.46)$$

Așa cum se poate observa din Figura 4.7, dacă talia fascicului w_0 este de ordinul centimetrului, pentru domeniul optic al lungimilor de undă, domeniul Rayleigh ia valori de ordinul sutelor de metri. De obicei, lentila se așează la distanțe mici față de sursa laser și putem considera cu bună aproximație faptul că $z_R \gg z_1$, caz în care relația generală a formulei lentilelor pentru fascicule gaussian-sferice, în câmp optic apropiat, se reduce la:

$$w_f \approx \frac{1}{w_0} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z_R}{f}\right)^2}} = \frac{1}{w_0} \frac{f}{z_R} \quad (4.47)$$

Observația 4.7. Dimensiunea spotului de focalizare prin lentilă

$$w_f \approx \frac{1}{w_0} \frac{\lambda f}{\pi} \quad (4.48)$$

scade cu lungimea de undă a fascicului. Doar fasciculele extinse, cu w_0 mare, pot fi focalizate cât mai bine.

Exemplu 4.2. Creșterea densității de informație inscripționată pe suprafața unui CD, DVD și respectiv Blu-Ray s-a realizat nu prin creșterea suprafeței acestora, ci prin micșorarea dimensiunii fiecărui bit inscripționat. În versiunile clasice ale acestor dispozitive, fiecărui bit îi corespunde o mică gaură perforată pe suprafața de scriere și volumul de date inscripționat crește semnificativ cu scăderea dimensiunii bitului [11] (CD 0.8 μm , DVD

0.4 μm , Blu-Ray 0.15 μm). Această performanță a fost obținută nu prin îmbunătățirea sistemului optic de focalizare, ci doar prin înlocuirea sursei laser cu emisie la lungimii de undă mai mici: CD 780 nm, DVD 650 nm și respectiv Blu-Ray 405 nm.

4.2 Rezonatorul optic cu două oglinzi

Vom discuta în detalii rezonatorul clasic și foarte comun construit din două oglinzi sferice O_1 și O_2 , cu razele de curbură R_1 și respectiv R_2 , plasate față în față, la distanța L una de cealaltă (Figura 4.12).

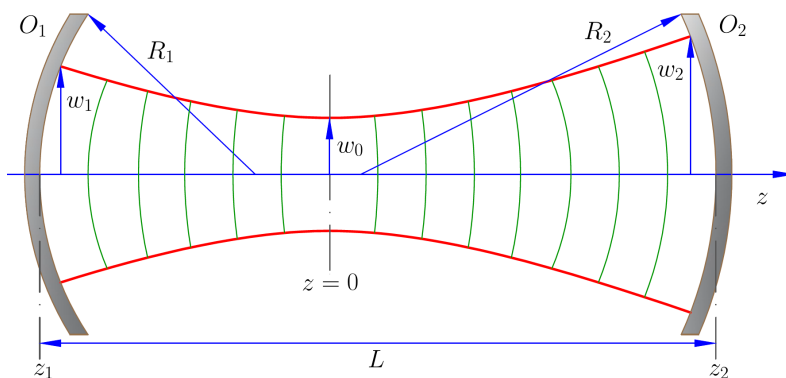


Figura 4.12: Rezonator cu două oglinzi sferice.

Alegerea și poziționarea oglinzilor poate fi făcută în două moduri:

- Dacă dorim să păstrăm forma gaussian-sferică a fasciculului, ar trebui ca oglinda O_1 să fie plasată la o poziție z_1 la care raza frontului de undă $R(z_1)$ să fie egală cu raza de curbură a oglinzii R_1 și respectiv, oglinda O_2 să fie plasată la poziția z_2 la care raza frontului de undă $R(z_2)$ să fie egală cu raza de curbură a celei de-a doua oglinzi, R_2 , iar $L = z_2 - z_1$. Această condiție de coincidență este însă greu de pus în practică.
- Varianta foarte des practică este următoarea: avem două oglinzi pe care le așez față în față, la o distanță oarecare L oarecare și calculez

forma și proprietățile fasciculului gaussian-sferic rezultat ca urmare a tipului și poziționării oglinzilor. În această situație, fasciculul se va reflecta continuu între cele două oglinzi astfel încât există posibilitatea formării undelor staționare iar la reflexia pe fiecare oglindă, raza frontului de fază constantă a undei astfel formate, va fi egală cu raza de curbură a oglinzii.

Descrierea fenomenologică a celui de-al doilea mod de realizare a unui rezonator optic se reduce la următorul set de ecuații:

"-" convenția
de semn
din optica
geometrică.

$$R(z_1) = z_1 + \frac{z_R^2}{z_1} \equiv -R_1 \quad (4.49)$$

$$R(z_2) = z_2 + \frac{z_R^2}{z_1} \equiv R_2 \quad (4.50)$$

$$L = z_2 - z_1 \quad (4.51)$$

cu z_1 , z_2 și z_R necunoscute. Definim doi parametri adimensionali numiți și *parametrii rezonatorului*,

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} \quad (4.52)$$

$$g_2 = 1 - \frac{L}{R_2} \quad (4.53)$$

parametri ce depind doar de tipul oglinzilor și de poziționarea relativă a acestora. Introducem parametrii g_1 și g_2 în sistemul de ecuații ce impune condiția de coincidență a razei fronturilor de undă, astfel încât necunoscutele z_1 , z_2 și z_R devin:

$$z_1 = \frac{g_2(1-g_1)}{g_1+g_2-2g_1g_2}L \quad (4.54)$$

$$z_2 = \frac{g_1(1-g_2)}{g_1+g_2-2g_1g_2}L \quad (4.55)$$

$$z_R^2 = \frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2} \frac{L^2}{2} \quad (4.56)$$

Impunem undei staționare formate între cele două oglinzi condiția de fascicul gaussian-sferic pentru care am determinat expresiile dimensiunii

spotului cât și dimensiunea domeniului Rayleigh:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z\lambda}{\pi w_0^2}\right)^2} \quad (4.57)$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (4.58)$$

Cu această impunere putem determina *talia* (w_0) fasciculului creat în interiorul cavității rezonante cât și dimensiunile spotului la suprafața celor două oglinzi (Figura 4.12):

$$w_0^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2}} \quad (4.59)$$

$$w_1^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_2}{g_1 (1 - g_1 g_2)}} \quad (4.60)$$

$$w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_1}{g_2 (1 - g_1 g_2)}} \quad (4.61)$$

Dimensiunea
spotului
depinde de
lungimea de undă.

Observația 4.8. Spoturile w_1 și w_2 la suprafața oglinzilor au dimensiune finită și reală doar dacă numitorul radicalului ia valori pozitive. Altfel spus, *rezonatorul este stabil* și nu pierde radial energie doar dacă:

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (4.62)$$

iar această inegalitate impune condiția de stabilitate a rezonatorului optic.

4.2.1 Diagrama de stabilitate a rezonatorului optic

Funcție de valorile razelor de curbură a oglinzilor și de poziționarea relativă a acestora, mărimi ce definesc complet parametrii rezonatorului g_1 și respectiv g_2 , se poate construi o *diagramă de stabilitate* a rezonatorului (Figura 4.13). Dacă se cunosc valorile R_1 și R_2 , distanța L dintre oglinzi se alege astfel încât după calcularea numerică a parametrilor rezonatorului g_1 și respectiv g_2 și plasarea lor pe diagrama de stabilitate, punctul rezultat să se situeze în interiorul zonei marcate în Figura 4.13.

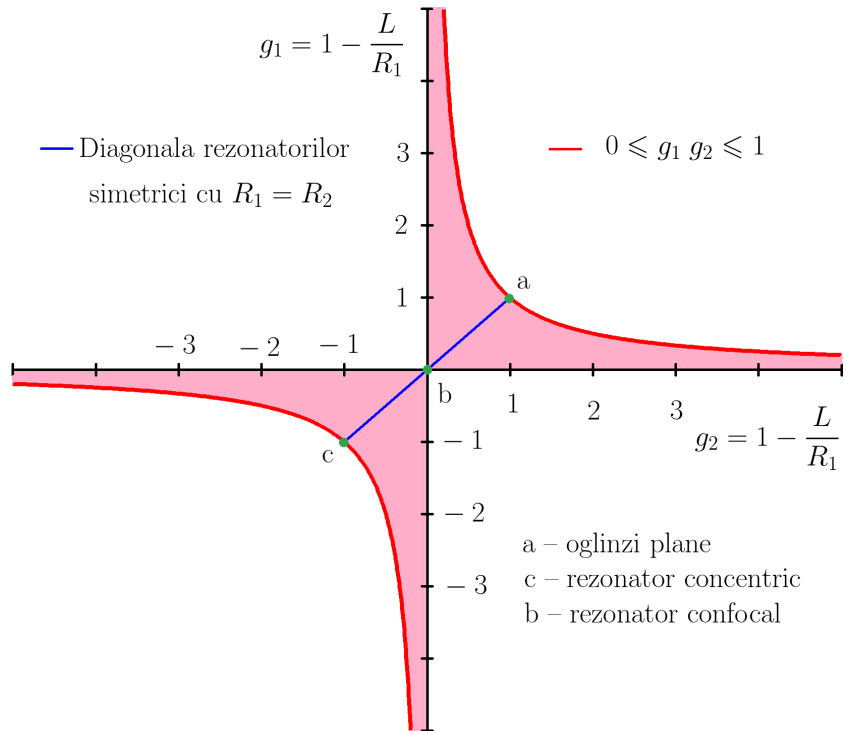


Figura 4.13: Diagrama de stabilitate a rezonatorului optic.

Exemplu 4.3. Avem la dispoziție o oglindă plană cu $R_1 = \infty$ și o oglindă concavă cu $R_2 = 0.5$ m. Dacă distanța dintre oglinzi este:

- $L = 1$ m atunci $g_1 = 1$ și $g_2 = -1$. Acest punct se situează în cadranul II al digramei, în afara zonei de stabilitate.
- $L = 0.25$ m atunci $g_1 = 1$ și $g_2 = 0.5$. Acest punct se situează în interiorul zonei de stabilitate și rezonatorul este optic stabil.

4.2.2 Rezonator optic simetric

Dacă oglinzile sunt identice, atunci forma fascicului gaussian-sferic este simetrică în raport cu planul taliei. În acest caz notăm

$$R_1 = R_2 \equiv R \text{ și } g_1 = g_2 \equiv g \quad (4.63)$$

iar

$$z_1 = z_2 = \frac{g(1-g)}{2g-2g^2}L = \frac{L}{2} \quad (4.64)$$

adică oglinzile sunt plasate simetric față de $z = 0$. Cu aceste notații, determinăm *talia* fasciculului cât și dimensiunile spotului la suprafața celor două oglinzi:

$$w_0^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{1+g}{4(1-g)}} \quad (4.65)$$

$$w_1^2 = w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{1}{1-g^2}} \quad (4.66)$$

Diagrama de stabilitate se reduce în acest caz la puncte situate pe prima bisectoare a graficului din Figura 4.13 iar limitarea mărimii g este impusă de inegalitatea:

$$-1 \leq g \leq 1 \quad (4.67)$$

Reprezentarea grafică a domeniului de variația a dimensiunii spoturilor în centru (*talie*) și la nivelul oglinzilor (Figura 4.14), se realizează funcție de noua condiție de stabilitate.

Pe prima bisectoare a diagramei din Figura 4.13 pot fi identificate trei situații des întâlnite în practică, marcate prin punctele (a), (b) și (c). Cele trei puncte sunt însă într-un echilibru instabil deoarece se situează pe granița de stabilitate a digramei. În continuare vom analiza cele trei cazuri indicate.

- (a) **Oglinzi plane.** Dacă rezonatorul este construit cu două oglinzi plane identice, cu raza de curbura $R = \infty$ atunci parametrul rezonatorului este $g = 1$. Analizând Figura 4.14 pentru acest caz particular, se observă că $w_0 = w_1 = w_2$ și că valoarea lor tinde la ∞ , lucru desigur nedorit în practică. Pentru a evita acest inconvenient, nu se folosesc oglinzi perfect plane ci oglinzi *aproape plane*, în sensul că sunt oglinzi concave cu rază mare de curbură dar finită, de ordinul zecilor de metri.

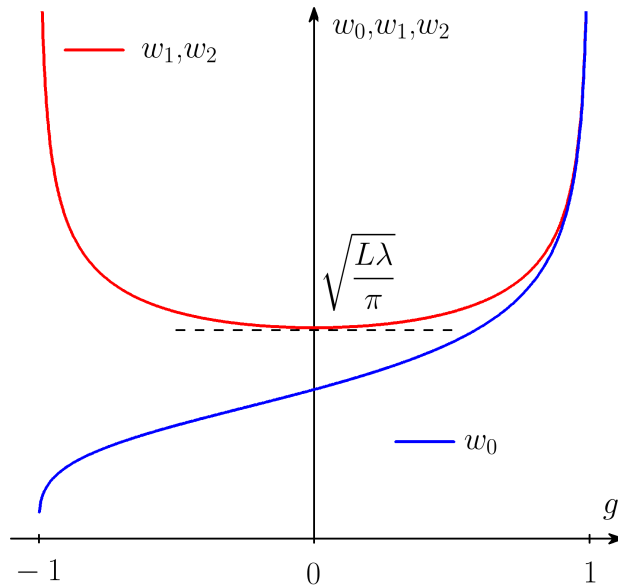


Figura 4.14: Rezonatorul simetric. Dimensiunea spoturilor în centru și la nivelul oglinzilor.

Exemplu 4.4. Rezonator cu oglinzi *aproape plane*:

$$R = 10 \text{ m}, L = 1 \text{ m} \Rightarrow g = 0.9 \text{ și } w_0 \approx w_1 = w_2 \approx 1.5 \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$$

- (b) **Rezonator con-focal.** Oglinzile sunt așezate la distanța $L = R$ astfel încât focarele lor coincid iar

$$g = 0 \Rightarrow w_1 = w_2 = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}}; w_0 = \sqrt{\frac{L\lambda}{2\pi}} \quad (4.68)$$

Exemplu 4.5. Rezonator con-focal cu oglinzi:

$$R = L = 1 \text{ m}, \Rightarrow w_1 = w_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \text{ iar } w_0 \approx 0.7 \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$$

- (c) **Rezonator concentric.** Oglinzile sunt așezate astfel încât centrele de curbură coincid adică $R = L/2$ și de aici $g = -1$. Conform Figurii 4.14, acest rezonator tinde să fie instabil iar spoturile $w_1 = w_2 \rightarrow \infty$ și $w_0 \rightarrow 0$.

Ca soluție practică se preferă rezonatorul *aproape concentric* în care distanța dintre oglinzi se alege astfel încât:

$$R = \frac{L + \Delta L}{2} \text{ și } g = 1 - \frac{2L}{L + \Delta L} \quad (4.69)$$

Dimensiunile spoturilor fascicului gaussian-sferic se reduc la:

$$w_1 = w_2 = \left(\frac{L}{4\Delta L} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \quad (4.70)$$

$$w_0 = \left(\frac{\Delta L}{4L} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \quad (4.71)$$

Exemplu 4.6. Rezonator *aproape concentric* cu oglinzi :

$$R = 0.5 \text{ m}, L = 1 \text{ m}, \Delta L = 0.005 \text{ m} \Rightarrow w_1 = w_2 = 2.6 \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}, w_0 \approx 0.2 \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$$

Distribuția câmpului electric în cele trei cazuri particulare de rezonator simetric exemplificate mai sus este reprezentată în Figura 4.15.

4.2.3 Rezonator optic semi-simetric

Cel mai utilizat tip de rezonator este acela în care se folosește o oglindă plană $R_1 = \infty$ și una concav sferică de rază R iar parametrii rezonatorului semi-simetric sunt:

$$g_1 = 0; g_2 = 1 - \frac{L}{R} = g \quad (4.72)$$

Acest rezonator este echivalent cu *jumătate de rezonator simetric*, adică *talia* fascicului se situează pe suprafața oglinzii plane:

$$w_0^2 = w_1^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g}{1-g}} \quad (4.73)$$

$$w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{1}{g(1-g)}} \quad (4.74)$$

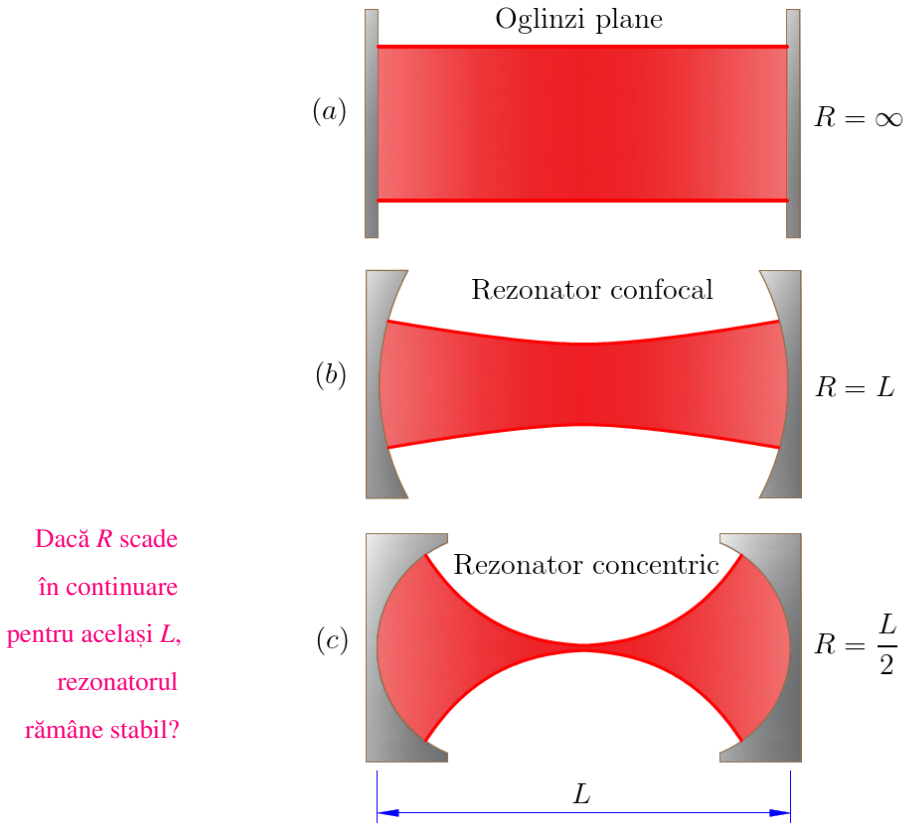


Figura 4.15: Forma fascicului gaussian-sferic format în rezonatorul simetric: (a) – oglinzi plane; (b) – con-focal; (c) – concentric.

Limitarea parametrului g este impusă de inegalitatea:

De ce?
$$0 \leq g \leq 1 \tag{4.75}$$

Rezonatorul semi-simetric (Figura 4.14) are o răspândire foarte largă în domeniul aplicațiilor practice deoarece asigură o colimare foarte bună a fascicului laser iar spotul ($\approx w_0$) își păstrează dimensiunea constantă pe distanțe foarte mari.

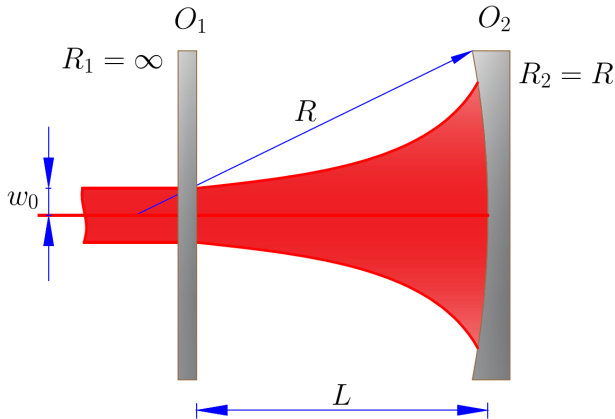


Figura 4.16: Rezonatorul semi-simetric cu oglinda O_1 semitransparentă.

Exemplu 4.7. Lungimea de undă a laserului cu HeNe este de 632.8 nm. Folosind un rezonator semi-simetric cu o oglindă plană semitransparentă și una sferică de rază $R = 10$ m plasate față în față, la distanța $L = 20$ cm, dimensiunile spoturilor fascicului gaussian-sferic rezultat sunt:

$$w_0 \approx 0.5 \text{ mm} \text{ și } w_2 \approx 1 \text{ mm}$$

iar aria fascicului se va dubla la distanța:

$$z_R \approx 1240 \text{ m}$$

asigurându-se astfel o bună colimare, cu o divergență mică a fascicului.

4.3 Frecvența modurilor de oscilație

La construirea rezonatorului optic, indiferent de tipul lui, se urmărește *întoarcerea* fascicului pe același drum, de un număr mare de ori, astfel încât în interiorul cavității să se formeze *unde staționare*. Dacă această condiție este îndeplinită atunci în interiorul rezonatorului se formează o structură staționară spațial de *maxime* și *minime* ale intensității câmpului electric. Pentru *un mod de oscilație* ce are ca rezultat formarea de unde staționare,

numărul total de noduri și ventre ale câmpului trebuie să fie un număr întreg (Figura 4.17). Ținând cont că la cele două extremități ale cavității (ex. la nivelul oglinzilor) trebuie să fie *noduri*, atunci lungimea totală a rezonatorului L trebuie să fie număr întreg de semi-lungimi de undă:

$$L = q \frac{\lambda_q}{2} = q \frac{c}{2\nu_q} \quad (4.76)$$

unde q este întreg iar ν_q este frecvența *modului* q . Dacă undele staționare se formează doar axial, în lungul rezonatorului și profilul fasciculului gaussian-sferic este circular, modul longitudinal de oscilație format se mai numește și *primul mod de oscilație* notat TEM_{00} .

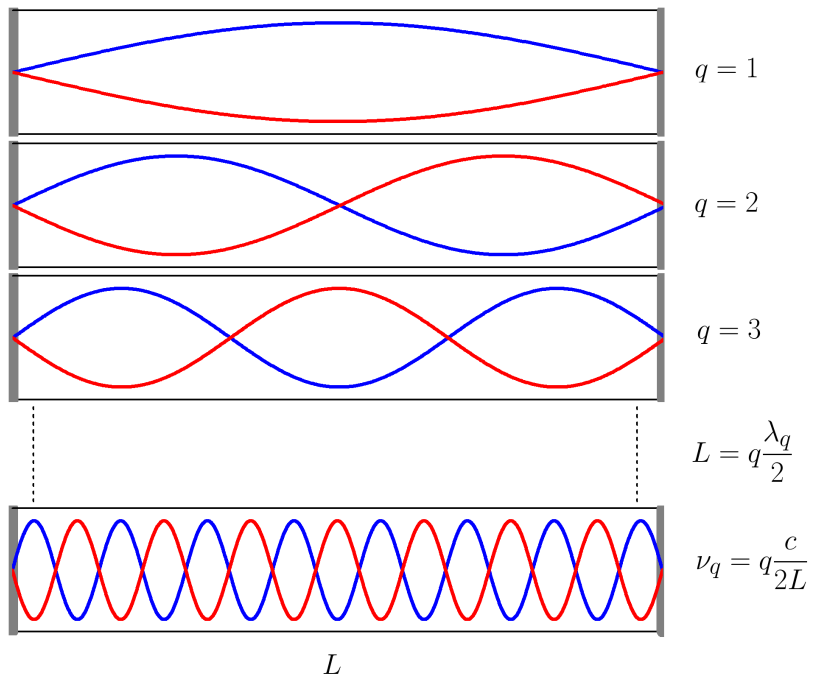


Figura 4.17: Unde staționare. Frecvența modurilor de oscilație.

Funcție de numărul de noduri și ventre, modul de oscilație q are frecvența proprie:

$$\nu_q = q \frac{c}{2L} \quad (4.77)$$

Intervalul exprimat în unități de frecvență dintre două moduri axiale consecutive este:

$$\Delta\nu_q = \nu_{q+1} - \nu_q = \frac{c}{2L} \quad (4.78)$$

Observația 4.9. Intervalul $\Delta\nu_q$ reprezintă un parametru propriu rezonatorului și se mai numește *domeniul spectral al rezonatorului* notat de obicei cu abrevierea FSR tradus din *Free Spectral Range*.

$$\text{FSR} = \frac{c}{2L} [\text{Hz}] \quad (4.79)$$

Exemplu 4.8. Pentru o cavitate cu lungimea $L = 15$ cm, domeniul spectral propriu rezonatorului are valoarea $\text{FSR} = 1$ GHz.

4.4 Rezonatorul Fabry-Perot

Considerăm un rezonator optic cu oglinzi identice, plane, semitransparente, a căror suprafețe reflectoare Σ_1 și Σ_2 sunt așezate la distanța L una de cealaltă (Figura 4.18). Gradul de transparență a oglinzilor este descris de coeficienții de transmisie t și respectiv reflexie r , mărimi specifice suprafețelor Σ_1 și Σ_2 . Presupunem că din exterior rezonatorului intră o rază optică, ce cade sub unghiul α_1 în punctul de incidență A , pe suprafața Σ_1 a primei oglinzi. În urma fenomenelor de reflexie și refracție în punctul A , o parte din energia rezei se întoarce în același mediu (cu indice de refracție n_1) iar restul de energie intră în spațiul rezonatorului, cu indicele de refracție n_2 , sub unghiul de refracție α_2 . Acest preces se repetă în mod similar în punctele ulterioare de incidență, B , C , D și așa mai departe.

Dacă elongația intensității câmpului electric al rezei incidente în punctul de incidență A este de forma:

$$E = E_0 e^{i\omega t} \quad (4.80)$$

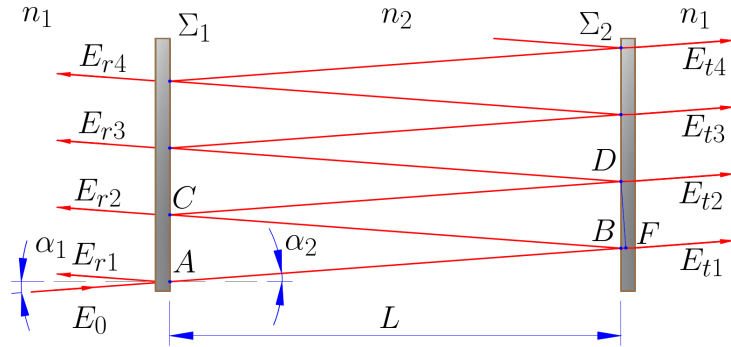


Figura 4.18: Rezonatorul Fabry-Perot cu oglinzi plane, semitransparente.

atunci, datorită reflexiilor multiple, elongațiile intensităților câmpurilor electrice transmise de prin rezonator sunt descrise de ecuațiile:

$$E_{t1} = E_0 t^2 e^{i(\omega t - k\chi)} \quad (4.81)$$

$$E_{t2} = E_0 t^2 r^2 e^{i(\omega t - k\chi - k\Delta)} \quad (4.82)$$

$$E_{t3} = E_0 t^2 r^4 e^{i(\omega t - k\chi - 2k\Delta)} \quad (4.83)$$

.....

$$E_{tn} = E_0 t^2 r^{2(n-1)} e^{i(\omega t - k\chi - (n-1)k\Delta)} \quad (4.84)$$

unde χ reprezintă diferența de drum optic a razei transmise E_{t1} față de cea inițială E_0 iar Δ reprezintă diferența de drum optic dintre două raze succesive ale fasciculului transmis prin rezonator (de exemplu între E_{t2} și E_{t1}). Amplitudinile intensității câmpului electric corespunzătoare razelor succesiv transmise prin rezonator scad în progresie geometrică cu rația:

$$r^2 e^{-ik\Delta} \quad (4.85)$$

În urma efectuării unui calcul relativ simplu, diferența de drum optic Δ se poate evalua conform relației:

$$\begin{aligned} \Delta &= n_2 (BC + CD) - n_1 BF = \frac{2Ln_2}{\cos \alpha_1} - 2Ln_2 \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \tan \alpha_1 \sin \alpha_2 = \\ &= \frac{2Ln_2}{\cos \alpha_1} (1 - \sin^2 \alpha_1) = 2Ln_2 \cos \alpha_1 \end{aligned} \quad (4.86)$$

Elongația rezultată din compunerea unui număr N mare de oscilații coerente corespunzătoare fasciculelor paralele transmise prin rezonator este egală cu suma progresiei geometrice:

$$\begin{aligned}\Psi_t &= \sum_{n=1}^N E_{tn} = E_0 e^{i(\omega t - k\chi)} \sum_{n=1}^N t^2 r^{2(n-1)} e^{-i(n-1)k\Delta} = \\ &= E_0 e^{i(\omega t - k\chi)} t^2 \frac{1 - r^{2N} e^{-iNk\Delta}}{1 - r^2 e^{-ik\Delta}}\end{aligned}\quad (4.87)$$

Dacă unghiul de incidență α_1 este foarte mic atunci practic numărul de reflexii succesive N tinde la ∞ și

$$\Psi_t = \sum_{n=1}^{\infty} E_{tn} = E_0 e^{i(\omega t - k\chi)} \frac{T}{1 - R e^{-ik\Delta}} \quad (4.88)$$

unde $T = t^2$ și $R = r^2$ reprezintă factorii de transmisie și respectiv reflexie specifici suprafețelor oglinzilor. Receptorii optici pot înregistra doar fluxurile de radiație, care sunt proporționale cu pătratul amplitudinii intensității câmpului electric. Intensitatea energetică totală a fasciculului transmis prin rezonator este:

$$\begin{aligned}I_T = \Psi_t \Psi_t^* &= \frac{E_0^2 T^2}{(1 - R e^{-ik\Delta})(1 - R e^{+ik\Delta})} = \frac{E_0^2 T^2}{1 + R^2 - 2R \cos k\Delta} = \\ &= \frac{E_0^2 T^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{k\Delta}{2}}\end{aligned}\quad (4.89)$$

Raportând intensitatea transmisă la intensitatea fasciculului incident de amplitudine E_0 se obține *factorul de transmisie al rezonatorului*:

$$\Gamma_T = \frac{I_t}{I_0} = \frac{\Psi_t \Psi_t^*}{\Psi_0 \Psi_0^*} = \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{k\Delta}{2}} \quad (4.90)$$

Factorul de transmisie Γ_T depinde de argumentul funcției \sin^2 ce are valori cuprinse între 0 și 1, funcție de valoarea $\frac{k\Delta}{2}$.

1. Maximul factorului de transfer

$$\Gamma_{TMax} = \frac{T^2}{(1-R)^2} = 1 \quad (4.91)$$

se obține pentru

$$\sin^2 \frac{k\Delta_M}{2} = 0 \quad (4.92)$$

cu

$$\frac{k\Delta_M}{2} = \pm q\pi \text{ sau } \Delta_M = 2Ln_2 \cos \alpha_{1M} = \pm 2q \frac{\lambda}{2} \quad (4.93)$$

2. Minimul factorului de transfer

$$\Gamma_{Tmin} = \frac{T^2}{(1+R)^2} \quad (4.94)$$

se obține pentru

$$\sin^2 \frac{k\Delta_m}{2} = 1 \quad (4.95)$$

cu

$$\frac{k\Delta_m}{2} = \pm (2q+1)\pi \text{ sau } \Delta_m = 2Ln_2 \cos \alpha_{1m} = \pm (2q+1) \frac{\lambda}{2} \quad (4.96)$$

Exemplu 4.9. Dacă mediul rezonatorului este aerul în condiții normale de presiune și temperatură ($p = 1 \text{ atm}$, $T = 25^\circ\text{C}$), atunci $n_2 = 1.0000483$ sau $n_2 \approx 1$, în condiția incidenței normale $\alpha_1 = 0$, condiția de **maxim** a factorului de transfer conduce la:

$$L = \pm q \frac{\lambda}{2} \quad (4.97)$$

Distanța dintre cele două suprafețe ale celor două oglinzi este egală cu un număr întreg de jumătăți de lungime de undă (**unde staționare**).

În mod analog se poate calcula factorul de reflexie Γ_R al rezonatorului prin evaluarea energiei reflectate de sistemul format din cele două oglinzi

(razele E_{r1} , E_{r2} , E_{r2} și așa mai departe din Figura 4.18). Dacă neglijăm eventualele fenomenele de absorbție sau emisie din interiorul rezonatorului, relația generală de conservare a energiei se scrie sub forma:

$$\Gamma_T + \Gamma_R = 1 \quad (4.98)$$

Observația 4.10. Valoarea maximă a factorului de transmisie Γ_T poate fi egală cu 1 în situația în care în rezonator se formează unde staționare. Ținând cont de legea conservării energiei, rezultă că dacă:

$$\Gamma_{TMax} = 1 \Rightarrow \Gamma_R = 0 \quad (4.99)$$

ceea ce înseamnă că întreaga energie a fasciculului inițial trece prin ansamblul celor două oglinzi, fără a exista energie reflectată, ca și cum cele două oglinzi nu ar exista în calea fasciculului.

4.4.1 Interpretarea grafică a factorului de transfer

Așa cum am văzut, factorul de transfer a rezonatorului Fabry–Perot

$$\Gamma_T = \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{k\Delta}{2}} \quad (4.100)$$

unde

$$\Delta = 2Ln_2 \cos \alpha_1 \text{ și } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.101)$$

depinde de mai mulți parametri cum ar fi: factorul de reflexie al oglinzilor, indicele de refracție al mediului rezonatorului sau unghiul de incidență. ne propunem să analizăm modul de dependență de fiecare factor, blocând pe rând pe ceilalți parametri.

1. **Influența gradului de reflexie al oglinzilor.** Presupunem o incidență normală $\alpha_1 = 0$ a rezelor iar mediul rezonatorului este aerul în condiții standard ($p = 1 \text{ atm}$, $T = 25 \text{ }^\circ\text{C}$, $n_2 = 1.0000483 \approx 1$).

Sistemul este iluminat cu radiații monocromatice cu lungimea de undă $\lambda = 632.8 \text{ nm}$. Distanța inițială dintre cele două oglinzi este $L = 5 \text{ mm}$ și crește ușor peste această valoare. Referitor la valorile coeficienților de reflexie R corespunzători oglinzilor, considerăm diferite valori de la $R = 0.50$ până la $R = 0.95$. Ținând cont de acești parametri, graficul factorului de transmisie a rezonatorului este prezentat în Figura 4.19. Poziționarea maximelor funcției $\Gamma_{TMax} = 1$ rămâne constantă odată cu modificarea factorului de reflexie al oglinzilor iar minimul funcției Γ_{Tmin} descrește spre valoarea 0.

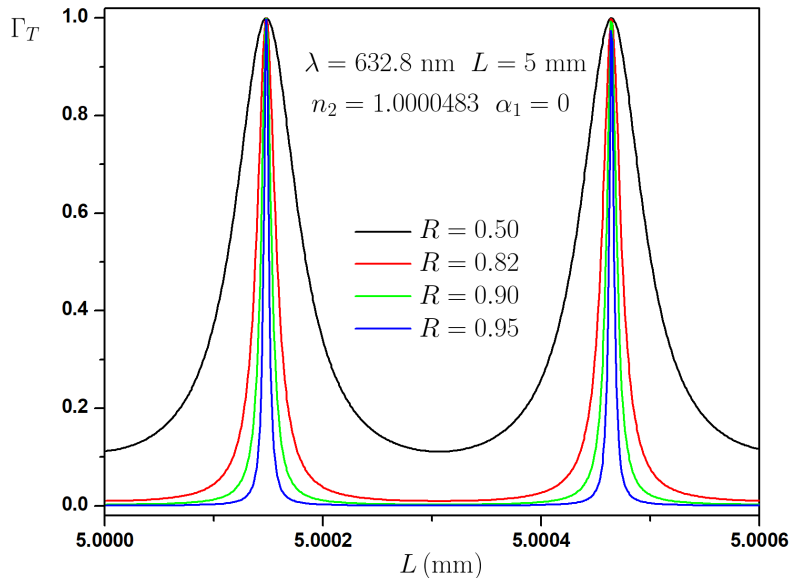


Figura 4.19: Dependența formei factorului de transmisie Γ_T funcție de gradului de reflexie al oglinzilor.

Observația 4.11. Cu cât gradul de reflexie al oglinzilor crește spre valoarea maximă egală cu 1, forma funcției Γ_T se îngustează și tinde spre o funcție de tip Dirac.

2. **Influența indicelui de refracție.** Presupunem o incidență normală a rezelor $\alpha_1 = 0$ și o valoare constantă a distanței $L = 5$ mm dintre cele două oglinzi. Sistemul este iluminat cu aceleași radiații monocromatice cu lungimea de undă $\lambda = 632.8$ nm. Alegem doar o singură valoare pentru factorii de reflexie ai oglinzilor $R = 0.82$ și presupunem că mediul dintre cele două oglinzi își modifică continuu indicele de refracție. Acest lucru se poate realiza crescând continuu presiunea aerului cu aproximativ 30 mmHg față de cea atmosferică (Figura 4.20).

Forma funcției Γ_T se păstrează, cu variații între minime ne-nule și maxime egale cu unitatea. Notăm cu FSR *distanța* dintre două maxime consecutive și cu $\Delta\nu_{1/2}$ semi-lărgimea unui maxim numită și *semi-lărgimea rezonatorului*.

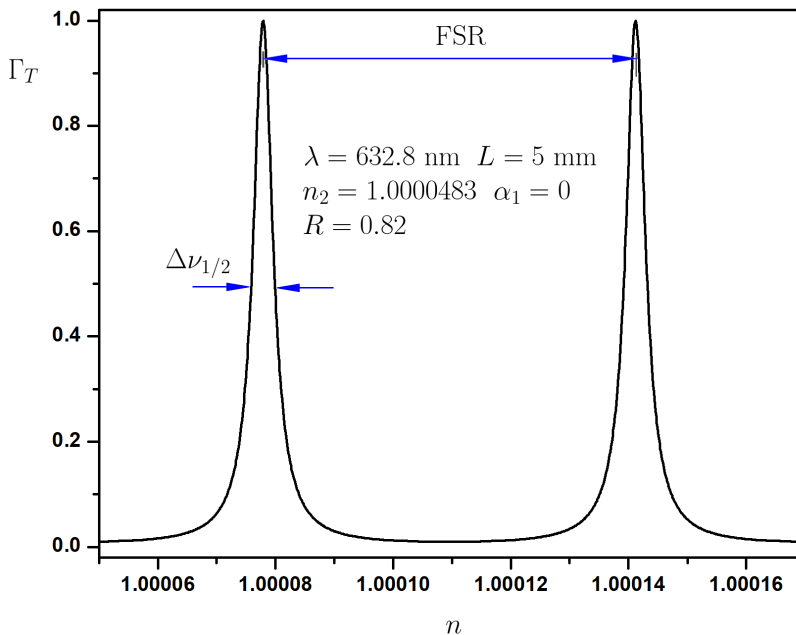


Figura 4.20: Dependența factorului de transmisie Γ_T funcție de indicele de refracție corespunzător mediului dintre cele două oglinzi.

Observația 4.12. O variație a indicelui de refracție la a patra zecimală (Figura 4.19) este echivalentă cu variația presiunii aerului cauzată de un strănut. Funcția Γ_T trece prin două maxime complete și ca urmare, măsurând Γ_T , putem determina experimental această foarte mică modificare a indicelui de refracție.

3. **Influența unghiului de incidență.** Presupunem că indicele de refracție este constant $n_2 = 1.0000483 \approx 1$ cât și distanța $L = 5$ mm dintre cele două oglinzi. Sistemul este iluminat cu aceleași radiații monocromatice cu lungimea de undă $\lambda = 632.8$ nm. Alegem aceeași valoare pentru factorii de reflexie ai oglinzilor $R = 0.82$. Considerăm că unghiul α_1 este ușor variabil (Figura 4.21).

La unghiuri α_1 foarte mici, apropiate de zero, maximele funcției Γ_T sunt ne-echidistante dar spre unghiuri ușor mai mari, distanța FSR dintre două maxime consecutive rămâne aproape constantă. Ansamblul de maxime și minime are simetrie circulară.

Observația 4.13. Portretul de interferență obținut pe un ecran plasat după rezonator are aspectul unor cercuri concentrice luminoase și respectiv întunecate. Cu cât unghiul razei incidente pe rezonator α_1 este mai mare, cu atât și raza cercurilor, aproape echidistante, este mai mare.

4. **Influența lungimii de undă.** Păstrăm aceleași condiții, indicele de refracție $n_2 = 1.0000483 \approx 1$, distanța dintre oglinzi $L = 5$ mm, factorii de reflexie ai oglinzilor $R = 0.82$. Considerăm că unghiul α_1 este ușor variabil (Figura 4.22) și suplimentar sistemul este iluminat cu două radiații monocromatice. Cele două radiații au lungimi de undă distincte dar foarte apropiate, cum ar fi de exemplu *dubletul sodiului*, $\lambda_1 = 589$ nm și $\lambda_2 = 589.6$ nm.

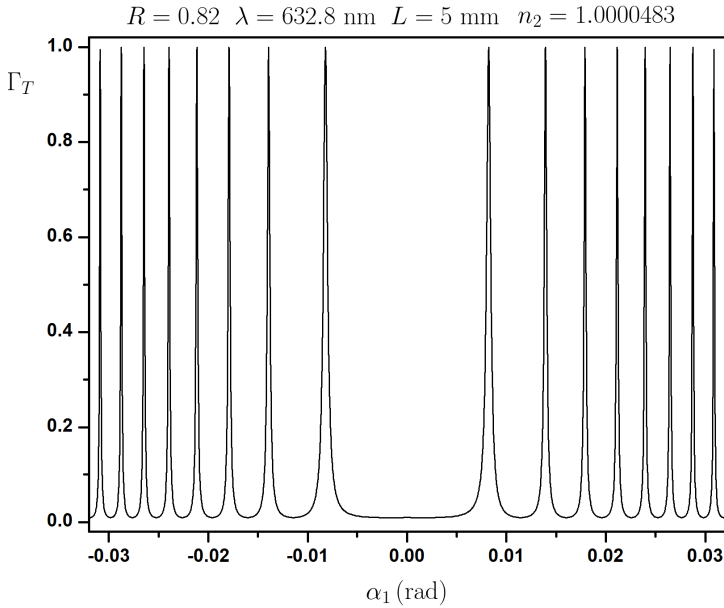


Figura 4.21: Dependența factorului de transmisie Γ_T funcție unghiul de incidență.

Fiecare radiație monocromatică, funcție de unghiul de incidență, va forma același set de maxime și minime ca în cazul precedent dar cele două portrete sunt distincte și pentru unghiuri suficient de mari, distanța dintre două maxime provenite independent de la cele două radiații monocromatice, rămâne constantă.

Observația 4.14. Chiar dacă lungimile de undă sunt foarte apropiate ca valoare (mai puțin de 1 nm) rezonatorul este capabil să diferențieze acest lucru. Pe un ecran situat după rezonator, în portretul de interferență se va putea observa un set de două cercuri concentrice distincte (Figura 4.23).

Trebuie de menționat faptul că fiecare *cerc luminos* se obține la același unghi α_1 (unghiul de incidență a fasciculului pe sistemul oglinzilor rezonatorului) iar franjele de interferență sunt de *egală înclinare*.

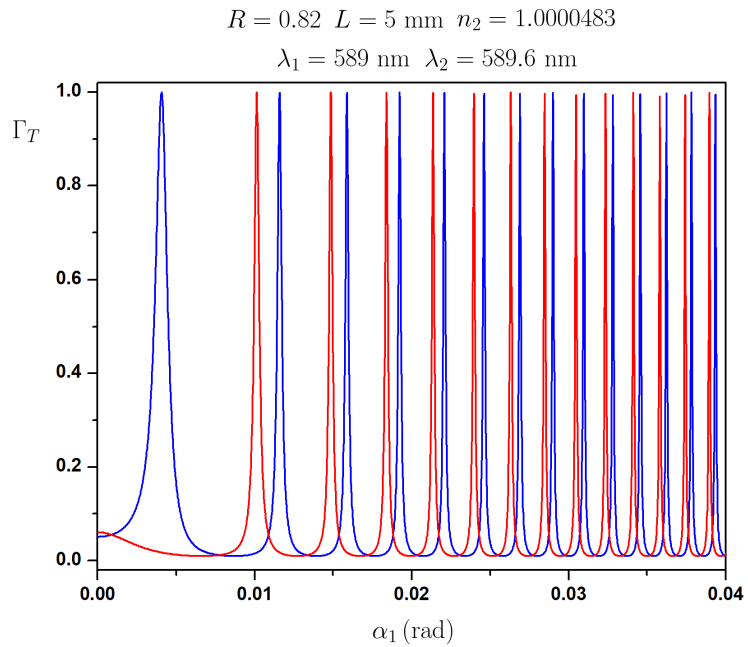


Figura 4.22: Dependența factorului de transmisie Γ_T funcție unghiul de incidență, pentru două lungimi de undă diferite.

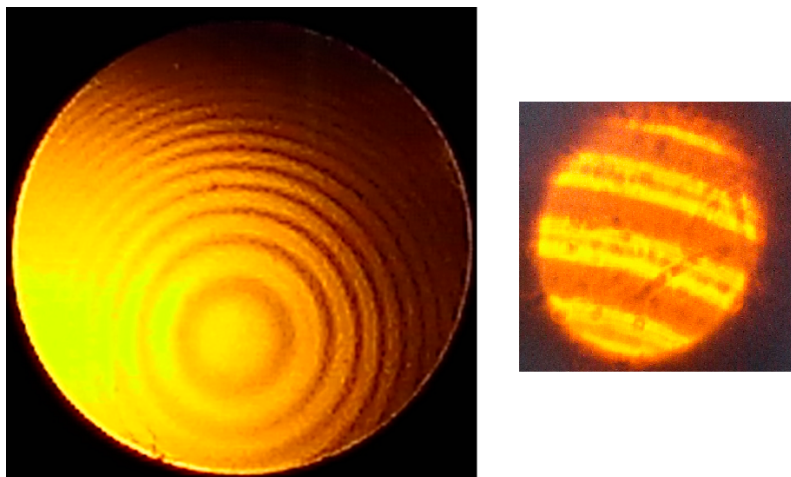


Figura 4.23: Dubletului sodiului observat în portretul de interferență, pe un ecran plasat după rezonator.

4.4.2 Mărimi specifice rezonatorului Fabry-Perot

O primă mărime se referă la vizibilitatea franjelor (vezi Figura 4.23) și se referă la gradul de observabilitate a două franje vecine. Contrastul portretului de interferență este cu atât mai bun cu cât franjele luminoase sunt cât mai subțiri intercalate de franje cât mai întunecate și este definit prin relația:

$$K = \frac{\Gamma_{TMax}}{\Gamma_{Tmin}} \quad (4.102)$$

Observația 4.15. Contrastul depinde doar de factorul de reflexie R specific oglinzilor:

$$K = \left(\frac{1+R}{1-R} \right)^2 \quad (4.103)$$

asa cum se poate deduce și din Figura 4.19. Și din acest motiv se folosesc oglinzi cu factor de reflexie R cât mai apropiat de valoarea maximă 1.

Așa cum am văzut, rezonatorul Fabry-Perot poate fi utilizat pentru punerea în evidență a două radiații monocromatice, cu lungimi de undă între care există o diferență $\lambda_2 - \lambda_1 = \delta\lambda$ mică, precum dubletul sodiului (Figura 4.23). Limitarea domeniului de măsurare provine din faptul că dacă de exemplu $\delta\lambda$ crește, atunci franjele provenite de la λ_2 se suprapun cu cele provenite de la λ_1 . Pe de altă parte, portretul de interferență este rezultatul condiției formării undelor staționare (Figura 4.17), unde intuitiv se poate observa că dacă numărul de ventre crește (valoarea q), lungimea de undă a undelor staționare scade, păstrând desigur aceeași lungime L a rezonatorului. Cu aceste considerente, condiția de suprapunere a maximelor celor două lungimi de undă este:

$$(q+1) \frac{\lambda}{2} = q \frac{(\lambda + \delta\lambda)}{2} \quad (4.104)$$

și astfel obținem valoarea $\delta\lambda$ maximă ce poate fi pusă distinct în evidență de

rezonator:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{q} \text{ cu } L = q\frac{\lambda}{2} \quad (4.105)$$

Trecem de la unități de lungimi de undă la unități de frecvență prin diferențierea relației $\nu = \frac{c}{\lambda}$:

Nu ar trebui
și un "-" ?

$$\delta\nu = \frac{c\delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{c}{q\lambda} \quad (4.106)$$

și astfel, valoarea maximă a diferenței de frecvență între două unde monocromatice ce încă formează portrete de interferență distincte este:

$$\delta\nu = \frac{c}{2L} \quad (4.107)$$

Observația 4.16. Domeniul spectral al rezonatorului Fabry-Perot notat cu FSR (*Free Spectral Range*) și definește *distanța* dintre două maxime consecutive ale factorului de transfer Γ_R (Figura 4.21):

$$\text{FSR} = \frac{c}{2L} \text{ [Hz]} \quad (4.108)$$

Mărimea FSR este **proprie rezonatorului**, se măsoară în Hz și reprezintă diferența în frecvență dintre două moduri longitudinale consecutive.

Ne propunem să determinăm semi-lărgimea unui singur maxim a factorului de transfer (Figura 4.21) și adoptăm metoda clasică de calcul evaluând $\Delta\nu_{1/2}$ la jumătatea înălțimii funcției Γ_R . Pentru simplificarea calculului presupunem $\Gamma_{Tmin} \approx 0$ și știind că $\Gamma_{TMax} = 1$ putem scrie:

$$\Gamma_{T1/2} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{k\Delta}{2}\right)_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad (4.109)$$

Notăm cu F mărimea strict pozitivă numită *coeficient de finețe* [12] ce depinde doar de factorul de reflexie al oglinzilor R .

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2} \quad (4.110)$$

și deci:

$$F \sin^2 \left(\frac{k\Delta}{2} \right)_{1/2} = 1 \quad (4.111)$$

Această ultimă ecuație de gradul 2 are două soluții pe care le vom determina cu următoarele considerente. Deoarece oglinzile au un grad de reflexie ridicat (R cât mai aproape de valoarea unitară maximă), coeficientul de finețe $F \gg 1$ și ca urmare putem aproxima funcția \sin cu argumentul ei astfel că:

$$\left(\frac{k\Delta}{2} \right)_{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{F}} \quad (4.112)$$

Această ecuație conține mai mulți parametri dar pentru determinarea semi-lărgimii factorului de transfer ($\Delta v_{1/2}$ din Figura 1.21), presupunem unele mărimi constante (unghiul de incidentă este $\alpha_1 = 0$, indicele de refracție $n_2 \approx 1$, lungimea rezonatorului L) și doar frecvența fasciculului se modifică ușor în jurul valorii v_0 pentru care factorul de transfer ia valoarea maximă $\Gamma_{TMax} = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{2\pi}{c} \left(v_0 - \frac{\Delta v_{1/2}}{2} \right) 2L &= -\frac{1}{\sqrt{F}} \\ \frac{1}{2} \frac{2\pi}{c} \left(v_0 + \frac{\Delta v_{1/2}}{2} \right) 2L &= +\frac{1}{\sqrt{F}} \end{aligned} \quad (4.113)$$

Observația 4.17. Prin scăderea celor două soluții se obține **semi-lărgimea spectrală a rezonatorului Fabry-Perot**:

$$\Delta v_{1/2} = \frac{c}{L} \frac{1}{\pi \sqrt{F}} = \frac{c}{2L} \frac{1-R}{\pi \sqrt{R}} \text{ [Hz]} \quad (4.114)$$

mărime exprimată în [Hz] și puternic dependentă de gradul de reflexie al oglinzilor R (Figura 4.19). Ea definește semi-lărgimea spectrală a fasciculului transmis prin rezonator. Dacă la intrare fasciculul este caracterizat de o semi-lărgime spectrală mai mare decât $\Delta v_{1/2}$ atunci **rezonatorul acționează ca un filtru ce îngustează banda semnalului transmis.**

Rezonatorul Fabry-Perot se utilizează ca instrument de măsură a variațiilor mici ale frecvenței unui fascicul monocromatic, de exemplu variațiile de frecvență cauzate de efectul Doppler. Ținând cont de expresia domeniului spectral FSR specific rezonatorului, din punct de vedere practic este mult mai utilă o mărime adimensională definită ca raportul dintre *distanța* dintre două maxime raportată la semi-lărgimea unui maxim.

Observația 4.18. Mărimea F_{FP}

$$F_{FP} = \frac{\text{FSR}}{\Delta\nu_{1/2}} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \quad (4.115)$$

se numește factor de calitate a rezonatorului sau factor de finețe sau chiar pe scurt *finețea* rezonatorului Fabry-Perot.

Domeniul de măsură a frecvenței este indicat de domeniul spectral FSR iar *pasul* de măsurare este indicat de valoarea *fineței* rezonatorului. Cu cât finețea este mai mare, cu atât rezoluția de măsură va fi mai mare.

Rezonatorul Fabry-Perot poate fi folosit pentru a *filtra* dintr-un domeniu larg de frecvențe, o singură radiație monocromatică. În tabelul de mai jos, am ales și un caz extrem, acela în care distanța dintre oglinzi este relativ mare (50 cm) iar semi-lărgimea spectrală specifică rezonatorului astfel construit este de 0.2 MHz. Această valoare este mai mică decât semi-lărgimea naturală a profilului de emisie Lorentz, egală cu semi-lărgimea rezultată din incertitudinea lui Heisenberg ($\Delta\nu_L = 10$ MHz).

Exemplu 4.10. În acest exemplu vom particulariza proprietățile rezonatorului modificând distanța dintre oglinzi și factorul de reflexie al acestora.

Mărimi specifice rezonatorului Fabry-Perot				
Factorul de reflexie al oglinzilor	R	0.95	0.998	0.998
Distanța dintre oglinzi	L	5 mm	5 mm	50 cm
Contrastul	$K = \left(\frac{1+R}{1-R}\right)^2$	1500	10^6	10^6
Finetea	$F_{FP} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$	60	1500	1500
Domeniul spectral	$FSR = \frac{c}{2L}$	30 GHz	30 GHz	0.3 GHz
Semi-lărgimea spectrală	$\Delta\nu_{1/2} = \frac{FSR}{F_{FP}}$	500 MHz	20 MHz	0.2 MHz

Exercițiu 4.3. Plasez o sursă optică ideală din punctul de vedere al semi-lărgimii minime a profilului de emisie indicat de incertitudinea lui Heisenberg într-un rezonator a cărui semi-lărgime este mai mică decât cea a sursei. Dacă rezonatorul acționează ca un filtru, este posibil ca fasciculul transmis să aibă o semi-lărgime spectrală mai mică decât cea naturală?

4.5 Rezonatorul acordabil Littrow

Din punctul de vedere al aplicațiilor practice de utilizare a sistemelor optice cu emisie laser, rezonatoarele ce funcționează la lungime de undă constantă, precum rezonatorul cu două oglinzi, au o răspândire largă de utilizare practică. Există însă aplicații care necesită utilizarea unor lasere cu lungime de undă variabilă (*tunable lasers*) și pentru putea a realiza acest deziderat, la construirea rezonatorului trebuie adăugat un element optic dispersiv. Inițial, ca element dispersiv s-a folosit prisma optică dar s-a

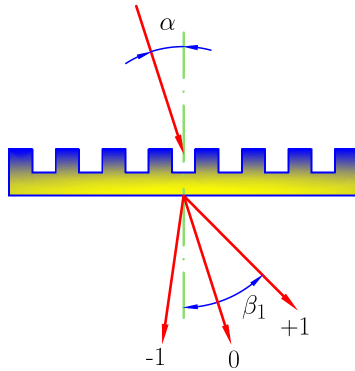
renunțat destul de repede la ea datorită slabei puteri de dispersie a prisme. Un alt inconvenient major al utilizării prisme este acela că dispersia este neliniară, foarte puternică în zona violet-albastru și foarte slabă în zona roșu–infraroșu. În prezent se utilizează ca element dispersiv inclus în rezonator, rețeaua de difracție ce oferă o dispersie ridicată și liniară pe un domeniu larg al lungimilor de undă.

4.5.1 Rețeaua de difracție

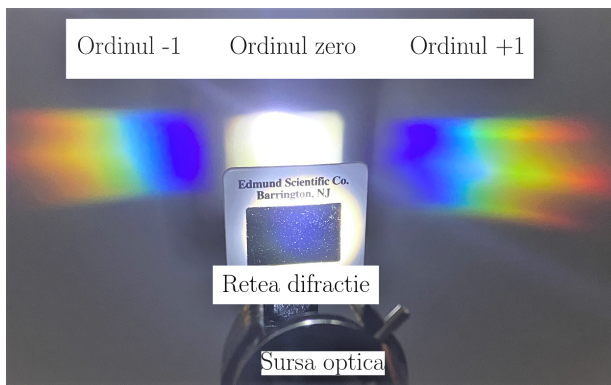
O rețea de difracție este o componentă optică cu o structură periodică care descompune un fascicul de raze paralele incident pe rețea sub diferite direcții numite ordine de difracție. Unghiul sub care pot fi observate ordinele de difracție depinde de dimensiunea structurii periodice cât și de lungimea de undă a luminii, astfel încât rețeaua acționează ca element dispersiv. În cazul aplicațiilor practice, rețelele au mai degrabă creste sau zgârieturi pe suprafața lor, decât o structură periodică linii întunecate, funcționând atât în transmisie (Figura 4.24a) cât și în reflexie (Figura 4.25a).

Ordinul zero de difracție păstrează structura spectrală a fasciculului inițial și de exemplu dacă sursa optică este "albă" atunci și ordinul zero este "alb" (Figura 4.24b și Figura 4.25b). Ordinele superioare, notate +1 și -1 sunt simetric distribuite față de ordinul zero și structura spectrală a sursei este descompusă în componentele sale monocromatice. Dacă rețeaua are o structură de zgârieturi simetrice (Figura 4.24a) atunci ordinele +1 și -1 au energie egală. Dacă rețeaua are o structură de zgârieturi asimetrice (Figura 4.25a) atunci o parte din energia ordinului -1 este transferată ordinului +1. Astfel, o rețea de difracție, poate concentra un procent ridicat din energia incidentă, într-un anumit ordin de difracție. Acest fenomen este cunoscut în literatura de specialitate ca efectul "*blazing*", efect ce se obține într-o anumită configurație optică ce ține și de geometria constructivă a rețelei de difracție.

Eficiența acestui proces de transfer de energie dintr-un ordin în altul



(a) zgârieturi simetrice dreptunghiulare



(b) dispersia simetric energetică a ordinilor de difracție

Figura 4.24: Dispersia radiațiilor optice prin rețeaua de difracție în transmisie, cu ordinile de difracție +1 și -1 de egală intensitate.

depinde de caracteristica constructivă a rețelei de difracție prin intermediul unghiului γ (*blaze angle* - Figura 4.25a) și are valoare maximă pentru o anumită lungime de undă (*blaze wavelength*). Din teoria Fraunhofer a difracției fasciculelor paralele, ecuația ce descrie fenomenul de difracție pe o rețea [13, 14] are forma general valabilă:

$$m\lambda = d(\sin \alpha + \sin \beta_m) \quad (4.116)$$

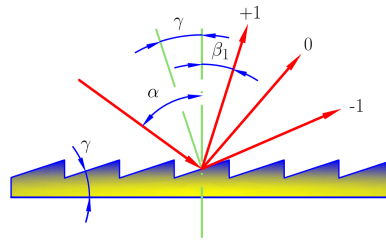
unde: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ este ordinul de difracție; λ lungimea de undă; α este unghiul de incidență pe suprafața rețelei; β_m este unghiul de difracție caracteristic ordinului de difracție m . Distanța d dintre două zgârieturi consecutive, mărime proprie rețelei, poate fi exprimată prin numărul de

trăsături N realizate pe unitatea de lungime exprimată, de obicei, în milimetri:

$$N = \frac{1}{d} \left[\frac{\text{trăsături}}{\text{mm}} \right] \quad (4.117)$$

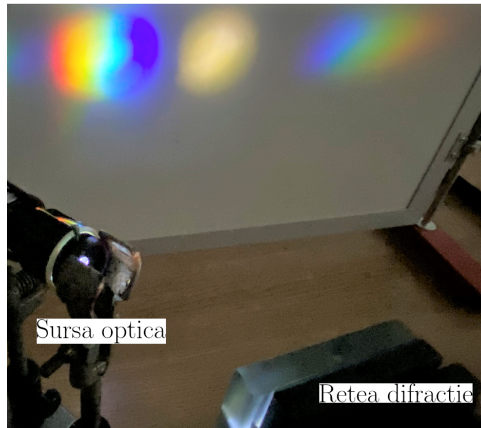
De exemplu, pentru ordinul +1 de difracție (Figura 4.24a), poziția în distribuția spectrală observată pe un ecran așezat în calea fasciculului dispersat la care regăsim o anumită lungime de undă λ este descrisă de ecuația:

$$\lambda = d (\sin \alpha + \sin \beta_1) \quad (4.118)$$



(a) zgârieturi sub forma de dinte de fierăstrău

Ordinul +1 Ordinul zero Ordinul -1



(b) dispersia ordinelor de difracție

Figura 4.25: Dispersia radiațiilor optice realizată de rețeaua de difracție în reflexie, cu intensitate diferită a ordinului de difracție +1 față de -1 numit efectul "blazing".

4.5.2 Configurația Littrow

În situația în care se folosește o rețea ca cea prezentată în Figura 4.25a (*blazed grating*), distribuția spectrală a ordinului +1 de difracție prezintă un maxim de intensitate pentru o anumită lungime de undă λ_{blaze} la care este îndeplinită condiția geometrică:

$$\alpha = \beta_1 = \gamma \quad (4.119)$$

Această condiție presupune și faptul că ordinul +1 de difracție este întors pe același drum către sursa fascicului paralel incident. (Figura 4.26), numită configurație Littrow. În acest caz particular, valoarea unghiului γ (*blaze angle*), mărime proprie rețelei, poate fi exprimat astfel:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta_1}{2} \quad (4.120)$$

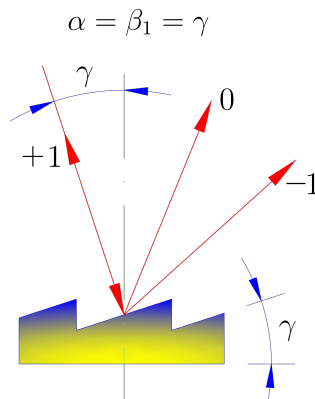


Figura 4.26: Configurația Littrow. Ordinul +1 este întors pe direcția fascicului incident.

Folosind dezvoltarea trigonometrică

$$\sin \alpha + \sin \beta_1 = 2 \sin \frac{\alpha + \beta_1}{2} \cos \frac{\alpha - \beta_1}{2} \quad (4.121)$$

ecuația general valabilă a difracției devine:

$$\lambda_{blaze} = 2d \sin \gamma \cos (\alpha - \gamma) \quad (4.122)$$

sau și mai simplu:

$$\lambda_{blaze-Littrow} = 2d \sin \gamma = \frac{2}{N} \sin \gamma \quad (4.123)$$

Așa cum se poate observa din relația de mai sus, mărimea $\lambda_{blaze-Littrow}$ este o mărime proprie unei rețele de difracție și exprimă lungimea de undă la care distribuția spectrală a portretului de difracție a ordinului +1 are maxim de intensitate. Împreună cu mărimile N și γ , definește caracteristicile optice ale rețelei.

Exemplu 4.11. În tabelul de mai jos sunt date câteva exemple de rețele de difracție cu specificații des întâlnite la mulți producători de astfel de componente optice.

Mărimi specifice rețelelor de tipul <i>blazed grating</i>		
N (trăsături pe mm)	γ (grade) – <i>blaze angle</i>	$\lambda_{blaze-Littrow}$ (nm)
600	13.9	800
1200	26.7	750
1800	26.7	500
1800	45	785
3600	45	392

4.5.3 Cavitata laser extinsă. Laser acordabil cu diodă.

În diverse experimente de absorbție laser sunt necesare surse optice coerente cu lungime de undă variabilă. Mai mult, semi-lărgimea spectrală $\Delta v_{1/2}$ a sursei laser trebuie să fie cât mai mică. De exemplu, semi-lărgimea naturală a unei linii spectrale, cu profil Lorentz, este de ordinul $\Delta v_L \approx 10$ MHz iar conturul de absorbție a unei linii spectrale specifice unui gaz atomic aflat la temperatura camerei este de ordinul $\Delta v_{Gauss} \approx 1000$ MHz. În acest exemplu am presupus că mecanismul de lărgire a liniei spectrale este cel datorat agitației termice și ca urmare profilul de absorbție respectă o distribuție de

tip Gauss centrată pe frecvența tranziției.

În general laserele cu mediu gazos, ca de exemplu laserul cu He-Ne, cu lungime de undă fixă ce nu poate fi modificată, sunt caracterizate de o semi-lărgime spectrală foarte mică de ordinul semilărgimii naturale. Această coerență ridicată este asigurată în principal de lungimea relativ mare a cavității rezonante formată din cele două oglinzi plasate la capetele tubului de descărcare.

În ultimii '90 ani au fost dezvoltate sistemele laser cu semiconductori (diodele laser) pe o largă scală a lungimilor de undă (din infraroșu până în ultraviolet). Avantajele majore sunt: dimensiuni foarte reduse a acestor dispozitive (dimensiunea unui Led), consum mic de energie și o plajă mare a puterii laser generate (de la 1 mW până la 500 mW). Ca dezavantaje enumerăm: variația lungimii de undă cu temperatura și intensitatea curentului prin diodă cât și o slabă coerență a radiației laser. Tipic pentru o diodă laser semi-lărgimea spectrală este de cel puțin $\Delta\nu_{Dioda} \approx 100$ MHz, adică de aproximativ zece ori mai mare decât semilărgimea naturală.

În situația în care se dorește folosirea unei diode ca sistem laser acordabil, variația lungimii de undă cu temperatura și intensitatea curentului electric poate fi transformată într-un avantaj însă rămâne problema coerenței scăzute. Soluția acestei probleme de creștere a coerenței constă în realizarea unei cavități rezonante suplimentare, exterioară diodei (Figura 4.27). Datorită faptului că mediul din această cavitate extinsă este aerul și nu un mediu activ, această cavitate extinsă funcționează mai degrabă ca un selector și nu ca un amplificator.

De ce dorim
scăderea
semi-lărgimii?

Cavitatea extinsă se realizează cu ajutorul unei rețele de difracție de tipul *blazed grating* așezată în calea fasciculului de raze paralele ce provine de la dioda laser în configurația Littrow (Figura 4.27) [15]. Unghiul de incidență pe rețea este egal cu unghiul *blaze angle* propriu rețelei ($\alpha = \gamma$) astfel încât ordinul +1 de difracție este întors pe același drum cu cel al

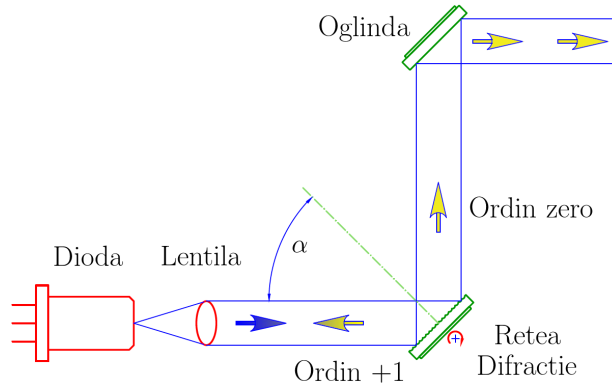


Figura 4.27: Ordinul +1 este întors către sursa fascicului incident, pe același direcție iar ordinul 0 este direcționat spre ieșire din sistemul rezonant Littrow.

radiației incidente. Ordinul zero de difracție este orientat spre o oglindă de redirecționare. Cu ajutorul unor sisteme piezoelectrice, prin rotirea controlată a rețelei de difracție, unghiul de incidență poate fi modificat foarte fin cu o valoare $\Delta\alpha$. Ordinul +1 de difracție este afectat de fenomenul de dispersie caracteristic rețelelor de difracție și ca urmare pentru un α dat, spre diodă se va întoarce exact pe același drum doar un domeniu restrâns al lungimilor de undă (o bandă mai îngustă față de banda de emisie a diodei). Radiația incidentă provenită de la diodă și radiația cu bandă îngustă a ordinului +1 de difracție au același drum dar sensuri opuse. Ca și în cazul rezonatorului Fabry-Perot cele două unde formează un ansamblu de unde staționare, un mod de oscilație longitudinal pe noua lungime a rezonatorului extern egală cu distanța diodă – rețea. Cum ordinul zero de difracție are întotdeauna „culoarea sursei” el va conține tocmai banda îngustă a lungimilor de undă caracteristice modului de oscilație din rezonatorul extins. Dacă în mod curent semi-lărgimea spectrală a diodei este de $\Delta\nu_{Dioda} \approx 100$ MHz, prin folosirea cavității extinse Littrow, ordinul zero poate avea o semi-lărgime de aproximativ $\Delta\nu_{Littrow} \approx 10$ MHz, adică o valoare comparabilă cu semi-lărgimea naturală $\Delta\nu_L \approx 10$ MHz.

Conform ecuației generale a difracției, pentru o nouă valoare a unghiului de incidență, rețeaua va întoarce către diodă o bandă egală în semi-lărgime dar centrată pe altă valoare a lungimii de undă. Noul ordin zero va avea o altă lungime de undă centrală astfel încât acest mecanism poate fi folosit la construirea unui laser acordabil. Concret, modificând fin valoarea unghiului de incidență α , rezonatorul Littrow funcționează ca un selector de bandă îngustă din banda largă a diodei.

Exemplu 4.12. În Figura 4.27 este reprezentată schema optică a cavității extinse Littrow [15], unde pentru simplitate am ales unghiul de incidență α a radiației provenită de la diodă de aproximativ 45° . În această situație particulară, la construirea unui laser acordabil cu diodă în domeniul roșu se folosește o rețea cu 1800 trăsături/mm iar pentru domeniul albastru se folosește o rețea cu 3600 trăsături/mm (conform tabelul de mai sus). În general elementele piezoelectrice cu ajutorul cărora se rotește rețeaua pot face o cursă completă de aproximativ $5\ \mu\text{m}$. Cu alte cuvinte, unghiul de incidență α poate fi modificat cu valoarea maximă $\Delta\alpha = 1.5 \times 10^{-4}\text{rad}$. În aceste condiții de ordin practic, ținând cont de expresia generală a ecuației de difracție, prin comandarea elementului piezoelectric se poate modifica lungimea de undă a laserului acordabil cu $\Delta\lambda \approx 60\ \text{pm}$ pentru o diodă în albastru și cu $\Delta\lambda \approx 100\ \text{pm}$ pentru o diodă din domeniul roșu. Altfel spus, pentru domeniul albastru centrat pe $392\ \text{nm}$, cu ajutorul configurației Littrow se poate modifica lungimea de undă în domeniul $391.97\ \text{nm} - 392.03\ \text{nm}$. Acest domeniu de variație pare îngust însă este suficient pentru scana complet forma profilului unei tranziții spectrale, mai ales că semi-lărgimea spectrală a fasciculului este tot atât de mică precum cea naturală.

Exemplu 4.13. În tabelul următor sunt sintetizate două exemple de rețele de difracție folosite în sistemele laser acordabil cu diodă alături de caracteristicile spectrale ale radiației laser.

Mărimi specifice sistemelor laser acordabile Littrow		
N (trăsături pe mm)	1800	3600
γ (grade) – <i>blaze angle</i>	45	45
$\lambda_{blaze-Littrow}$ (nm)	785	392
Semi-lărgimea spectrală în unități de frecvență	$\Delta\nu_{Littrow} \approx 10$ MHz	$\Delta\nu_{Littrow} \approx 10$ MHz
Semi-lărgimea spectrală în unități de lungimi de undă	0.00002 nm	0.000005 nm
Domeniu spectral (nm)	784.95 – 785.05	391.97 – 392.03
Rezoluție spectrală (puncte/nm)	5000	20000

Observația 4.19. Monocromatoarele clasice utilizate în spectroscopia de emisie optică au o rezoluție spectrală de aproximativ 10 puncte/nm și doar așa numitele *High Resolution Monochromators* urcă până la maxim 100 puncte/nm. Cu un astfel de instrument optic se poate determina precis doar lungimea de undă centrală a tranziției spectrale observate, nu și forma profilului tranziției. Profilul unei linii spectrale este identic indiferent dacă este urmărit în emisie sau în absorbție. Deoarece sistemele laser acordabil Littrow ating rezoluții de $10^3 - 10^4$ puncte/nm ele sunt utilizate în spectroscopia de absorbție tocmai pentru a scana forma profilului tranziției spectrale.

Capitolul 5

Tipuri de sisteme laser

5.1 Laserul cu He-Ne

Laserul cu He-Ne este un tip de laser în care un amestec de heliu și neon este utilizat ca mediu activ. Cele două gaze nobile nu interacționează chimic și de aceea acest laser poate fi considerat un laser cu gaz atomic. Din punct de vedere constructiv este format dintr-un tub lung de descărcare (Figura 5.1) cu lungimi cuprinse între 0.2–1 m și diametru interior de ordinul 5 mm. Tubul este umplut cu un amestec de He și Ne, în general în raportul 10 : 1, la o presiune scăzută, de ordinul torr-ului. Electrozii metalici (catodul și anodul) sunt așezați cu scopul de a produce o descărcare în gaz și sunt conectați la o sursă de alimentare de înaltă tensiune. Tubul este sigilat și pe axa tubului sunt fixate două oglinzi reflectoare care formează rezonatorul. De obicei, una din oglinzi are un coeficient de reflexie egal cu unitatea iar cealaltă, pe

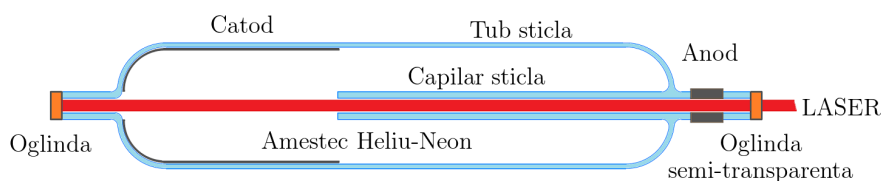


Figura 5.1: Laserul cu He-Ne.

unde se extrage radiația laser în exterior, un coeficient de reflexie ridicat dar subunitar ($R = 0.98$).

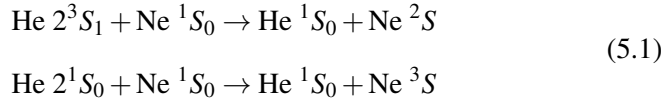
Ciocnirile electron–neutru ce se realizează în plasma descărcării odată cu aplicarea tensiunii externe, conduc pe de o parte la excitarea ambilor tipuri de atomi (heliu și neon) cât și la ionizarea lor. Dintre toate elementele chimice, heliu are cea mai mare energie de ionizare (24.6 eV). Electronii din descărcare trebuie să dobândească această energie de la câmpul electric extern aplicat prin intermediul unei surse de înaltă tensiune. Alături de procesele de ionizare, cele de excitare joacă un rol foarte important în funcționarea laserului cu He–Ne.

Întâmplarea face ce cele două tipuri de atomi (heliu și neon) să aibă câte două niveluri metastabile, ba chiar mai mult, energiile lor sunt foarte apropiate ca valoare (Figura 5.2). Primul nivel excitat al atomului de heliu ($\text{He } 2^3S_1$) are aceeași energie cu nivelul atomului de neon ($\text{Ne } 2S$) și ambele sunt metastabile. Similar, nivel atomului de heliu ($\text{He } 2^1S_0$) are aceeași energie cu nivelul atomului de neon ($\text{Ne } 3S$). Comparativ cu alte niveluri superioare de excitare prin impact electronic, datorită timpului de viață mare a celor metastabile, într-un regim de funcționare staționar, putem considera doar populațiile metastabile și neglija populațiile nivelurilor cu timp de viață mic. Deși numărul total de procese elementare implicate în funcționarea laserului cu He–Ne se ridică la peste 20 de tranziții atomice, el poate fi descris folosind o schema de pompaj simplificată doar la patru niveluri.

Observația 5.1. Sursa de pompaj a laserului He-Ne o reprezintă cumulumul de stări atomice excitate prin impact electronic a nivelurilor metastabile.

Raportul amestecului de gaz heliu : neon (10:1) este ales astfel încât heliul este predominant și ne putem imagina că 1 atom de neon este înconjurat, în medie, de 10 atomi de heliu. Parte din atomii de heliu sunt în stare excitată pe unul din cele două niveluri metastabile. Datorită timpului de viață mare,

unul dintre metastabilii de heliu va ciocni atomul de neon, transferându-i energia sa internă:



Datorită cuantificării energiei interne, energia metastabililor de heliu poate fi transferată doar integral sau deloc. Reacțiile de mai sus sunt posibile doar dacă nivelurile metastabile ale atomilor heliu și neon sunt foarte apropiate ca valoare energetică.

Observația 5.2. Rolul heliului este determinant în funcționarea laserului cu He-Ne deoarece asigură popularea nivelurilor metastabile ale neonului prin intermediul ciocnirilor cu transfer rezonant de energie internă.

În sistemele laser ce funcționează în regim continuu, conform schemei cu

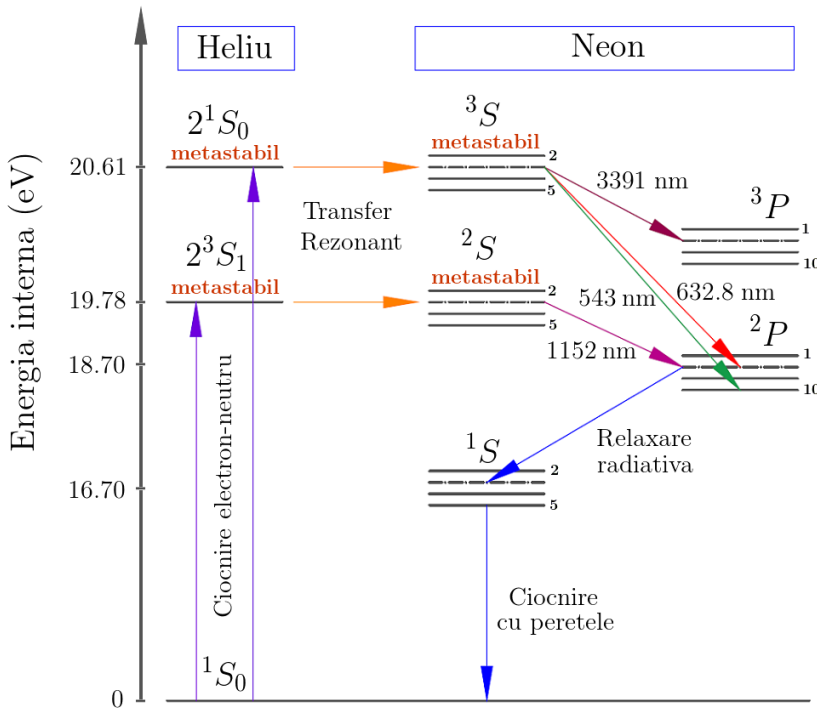


Figura 5.2: Tranziții implicate în funcționarea laserului cu He-Ne

patru niveluri energetice, tranziția laser se obține de pe un nivel metastabil pe un nivel inferior cu timp de viață mic. Așa cum se poate observa din diagrama energetică din Figura 5.2, sunt posibile mai multe variante de dezexcitare a metastabililor neonului. Tranzițiile laser se pot realiza pe ambele niveluri, $\text{Ne } ^3P$ sau $\text{Ne } ^2P$ ce au o structură de 10 sub-niveluri fiecare. Se pot genera tranziții laser cu diverse lungimi de undă în infraroșu (1152 nm, 3391 nm) sau vizibil (543 nm, 594 nm, 632.8 nm).

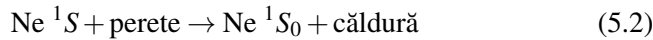
Observația 5.3. În laserul cu He–Ne, lungimea de undă 632.8 nm asociată radiației laser este generată printr-o tranziție caracteristică neonului și nu heliului.

Selectarea unei singure lungimi de undă o realizează în principal rezonatorul prin intermediul proprietăților oglinzilor. Ținând cont și de probabilitatea de realizare a fiecărei tranziții, cea mai probabilă oferind și puterea laser maximă, varianta constructivă cea mai populară a laserului cu He–Ne are lungimea de undă de 632.8 nm (roșu). Selectarea acestei lungimi de undă se realizează folosind oglinzi cu înalt grad de reflexie doar pentru domeniul roșu și în același timp transparente în domeniul verde și puternic absorbante în infraroșu.

Exercițiu 5.1. Explicați modalitatea în care proprietățile de reflexie a oglinzilor selectează lungimea de undă a tranziției laser.

Randamentul oricărui sistem laser depinde de valoarea inversiei populației, care este cu atât mai mare cu cât populația metastabililor de neon este mai mare iar populațiile nivelelor inferioare laser ($\text{Ne } ^3P$ și $\text{Ne } ^2P$) sunt mai mici. Altfel spus, toate nivelurile inferioare tranziției laser trebuie repede golite și stările atomice aduse pe nivelul fundamental. Diferența energetică între stările $\text{Ne } ^2P$ și $\text{Ne } ^1S$ este de 2 eV, golirea realizându-se printr-o relaxare radiativă în domeniul ultraviolet. Golirea nivelului $\text{Ne } ^1S$ reprezintă o problemă îndelung analizată deoarece tranzițiile optice între două niveluri S

sunt interzise (neradiative). Ca urmare energia internă relativ mare (16.7 eV) Nivelul Ne 1S a stărilor Ne 1S trebuie transferată prin intermediul ciocnirilor cu peretele este metastabil? tubului de sticlă:



Acest proces de ciocnire nu este unul rezonant deoarece energia absorbită de perete nu este cuantificată și va duce la încălzirea întregului dispozitiv. Pentru a eficientiza golirea nivelului Ne 1S prin acest proces, guvernat de difuzia plasmei la perete, diametrul tubului de sticlă este mic, tubul fiind aproape capilar (1–2 mm) astfel încât atomii ajung repede la perete.

Deși puterea laserului cu He–Ne este relativ mică, de ordinul miliwatt-ului, s-a dovedit a fi foarte stabil în timp, cu durată mare de funcționare. Lungimea de undă asociată radiației laser 632.8 nm rămâne stabilă în timp, fasciculul are semi-lărgime spectrală la fel de mică precum cea naturală și de aceea acest laser este folosit drept ca sistem de calibrare sau etalonare.

5.2 Laserul cu rubin

Laserul cu rubin este primul tip de laser construit de T.H. Maiman în 1960 folosind ca mediu activ mineralul de oxid de aluminiu (Al_2O_3) dopat cu ioni de crom (Cr^{3+}) drept impuritate (0.05%). Cristalele de rubin folosite la construirea sistemelor laser sunt crescute artificial, în general sub formă cilindrică (lungime 10 cm, diametru 1 cm). Oxidul de aluminiu este incolor dar gradul de impurificare cu ioni de crom a rubinului determină nuanța de roșu, observabilă cu ochiul liber a cristalului. Rubinul este un material cu un înalt grad de fluorescență și culoarea roșie a cristalului se datorează fenomenului de fluorescență ușor observabil dacă iluminăm cristalul folosind o sursă de lumină albastră sau verde (Figura. 5.3).

Cu ajutorul unui monocromator de studiu a fluorescenței se poate obține domeniul spectral total de excitare a fluorescenței în roșu al rubinului (Fi-

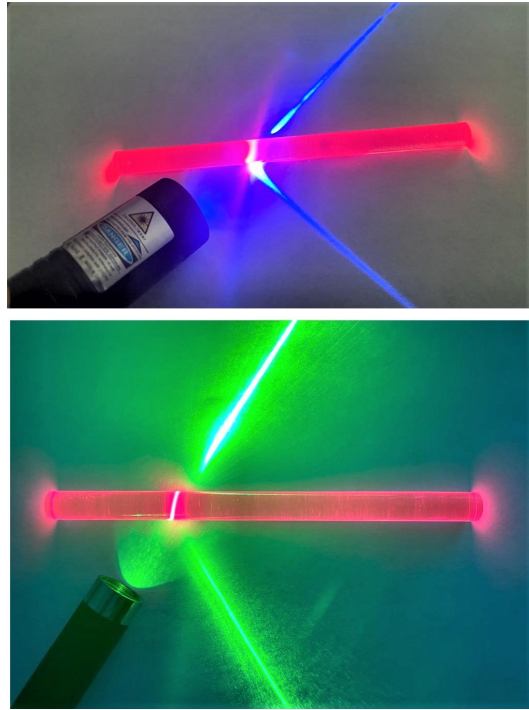


Figura 5.3: Fluorescența roșie a rubinului excitată cu lumină albastră sau verde

gura. 5.4). De remarcat este faptul că rubinul absoarbe cam tot domeniul albastru – verde. Altfel spus, spectrul de excitare este foarte larg iar semi-lărgimea acestor două tranziții de absorbție este foarte mare, de ordinul a 50 nm, cu o eficiență ușor mărită a domeniului albastru față de cel verde. Acest lucru se datorează faptului că atunci când ionii sunt încorporați într-un solid, ei pot absorbi radiațiile într-o bandă mult mai largă de lungimi de undă.

În mod contrar, spectrul de fluorescență în roșu (Figura. 5.4) este foarte îngust și are o anumită particularitate. El înglobează două tranziții înguste, cu semi-lărgimi spectrale de ordinul $\Delta\lambda \approx 1$ nm, una respectă un profil de tip Gauss, cealaltă un profil de tip Lorentz. Cauza profilului Gauss este agitația termică, ca urmare această tranziție Gauss este influențată de valoarea temperaturii cristalului. Tranziția cu profil Lorentz, profil natural, este mult mai stabilă, are lungimea de undă centrală la valoarea $\lambda = 694.44$ nm iar

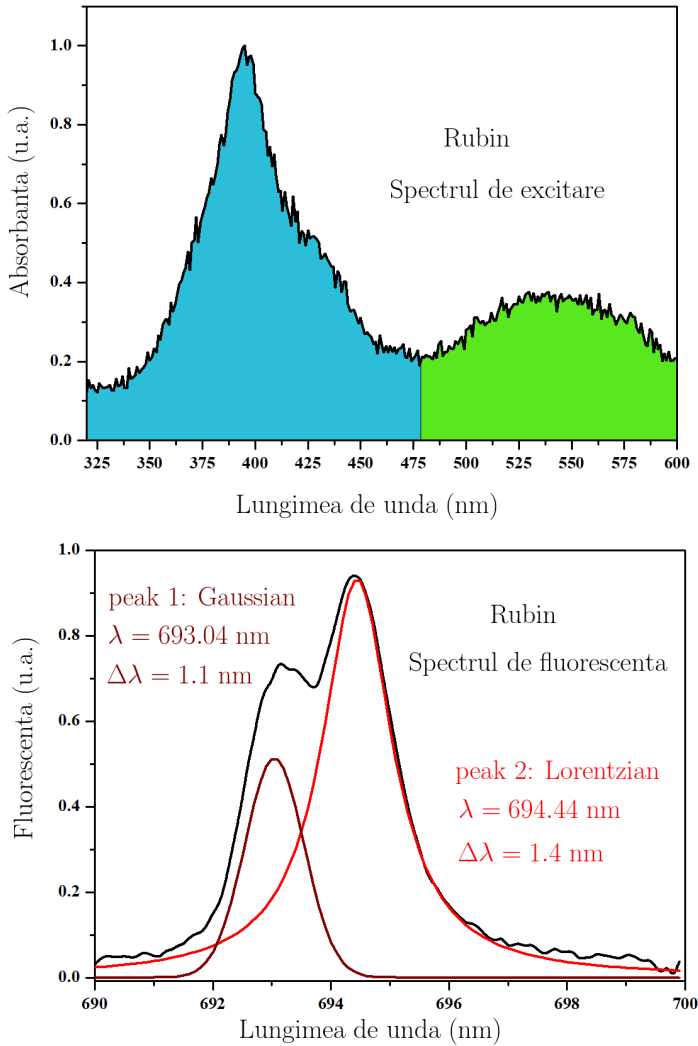


Figura 5.4: Spectrele de absorbție și emisie fluorescentă a rubinului

timpul de viață al fluorescenței este de 1 ms, un timp de viață mare. Ca urmare nivelul superior al acestei tranziții este metastabil.

Folosind spectrele de excitare și emisie a fluorescenței din Figura. 5.4 putem construi diagrama energetică a ionilor de Cr^{3+} (Figura. 5.5) din matricea rubinului. Concret, din spectrul de excitare extragem lungimile de undă specifice maximelor de absorbție din domeniul albastru și verde. Energia internă din diagrama energetică se calculează folosind relația între energia

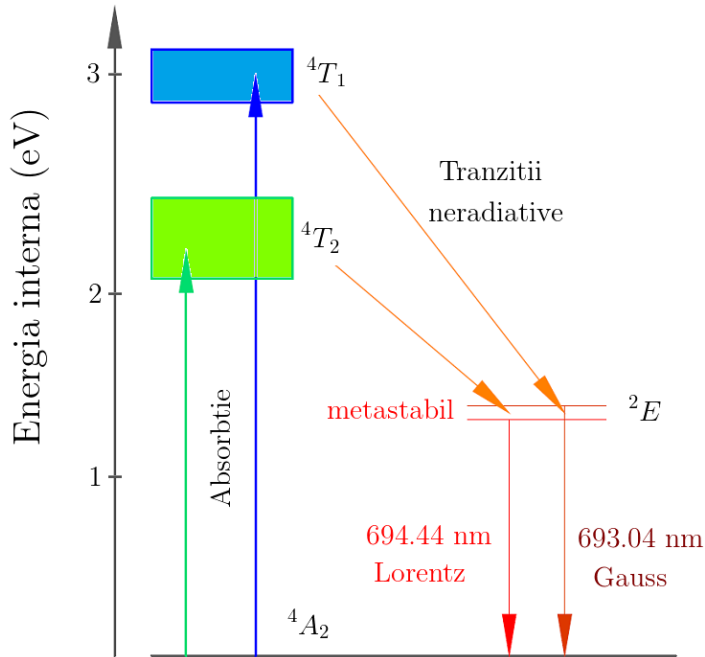


Figura 5.5: Diagrama energetică a ionilor de Cr^{3+} din cristalul de rubin

fotonului și lungimea de undă asociată. Incertitudinea energetică a unui nivel sau semi-lărgimea acestuia se evaluează din semi-lărgimea spectrului de excitare a fluorescenței.

Exemplu 5.1. Deoarece spectrul de excitare este foarte larg, de ordinul a 50 nm fiecare din benzile albastru și verde, nivelurile energetice 4T_2 și 4T_1 vor fi practic benzi energetice cu o semi-lărgime de aproximativ

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda \approx 0.25 \text{ eV} \quad (5.3)$$

În mod similar, din spectrul de fluorescență se extrag lungimile de undă centrale ale celor două tranziții care se convertesc în unități energetice. Semi-lărgimile celor două sub-niveluri 2E vor fi foarte mici deoarece semi-lărgimea tranzițiilor este de ordinul nanometrului. În acest mod simplu, folosind spectrele de fluorescență și de excitare a fluorescenței rubinului se obține diagrama energetică a ionului Cr^{3+} (Figura. 5.5).

Observația 5.4. Timpul de viață a stărilor excitate se evaluează ușor ținând cont de principiul de incertitudine a lui Heisenberg:

$$\Delta E_i \tau_i \geq \frac{h}{4\pi} \quad (5.4)$$

care explică simplu faptul că nivelurile largi energetic au timp de viață mic iar nivelurile înguste sunt metastabile.

Exercițiu 5.2. Evaluați timpii de viață a nivelelor ionului Cr^{3+} din matricea cristalului de rubin.

Laserul cu rubin este utilizat ca un laser pulsant, producând lumină roșie la 694,4 nm. Pompajul este optic și se realizează cu un tub flash–bliț ce emite un spectru larg al lungimilor de undă, pe un interval de timp relativ scurt. O altă particularitate a laserului cu rubin este aceea că nivelul inferior laser este chiar nivelul fundamental și prin urmare, este dificil să se mențină inversia populației. Funcționarea în regim laser presupune o consumare a populației metastabile mai rapidă decât poate fi restaurată de lumina flash ce constituie sursa de pompaj optic. După epuizarea stării 2E , generarea laser încetează pentru câteva microsecunde. Dacă lampa tip bliț este încă activă, pompează din nou ionii de crom de pe nivelul fundamental pe nivelul superior laser și începe din nou generarea laser. O serie de astfel de impulsuri sunt produse până când intensitatea luminii flash–bliț scade la un astfel de nivel încât nu mai poate să refacă inversia necesară a populației. Fasciculul laser se menține atât timp cât atomii excitați pe nivelul metastabil persistă în cristalul rubinului, care este de obicei de aproximativ o milisecundă. Laserul cu rubin pulsant a fost folosit pentru prima dată la celebrul experiment cu laser de determinare a distanței până la Lună cu o precizie de aproximativ 15 cm. Fasciculul este trimis spre Lună unde un reflector întoarce fasciculul spre Pământ. Măsurând timpul de întoarcere, se calculează distanța Pământ–Lună.

5.3 Laserul Nd-YAG

Similar ca în cazul laserului cu rubin, mediul activ al laserului Nd-YAG este tot cristalin. Granatul de ytriu–aluminiu $Y_3Al_5O_{12}$ este un granat în care oxidul de aluminiu din granat este înlocuit cu ytrim în mod ordonat. Acest cristal este dopat cu un metal rar, neodimul. Ionii de Nd^{3+} sunt distribuiți aleatoriu în cristal înlocuind pe alocuri ionii de Y^{3+} . Ionii Nd^{3+} oferă nivelurile energetice ale laserului Nd-YAG, atât pentru tranzițiile de emisie, cât și pentru pompaj. Nivelurile de energie ale ionului de neodim Nd^{3+} sunt reprezentate de un grup de litere și numere ce descriu numerele cuantice asociate cu diferite componente: litera corespunde numărului cuantic orbital, exponentul indică numărul cuantic de spin iar indicele fracțional descrie numărul cuantic unghiular. Datorită câmpului electric intern din cristal, prin efect Stark, nivelurile energetice sunt despicate în sub-niveluri.

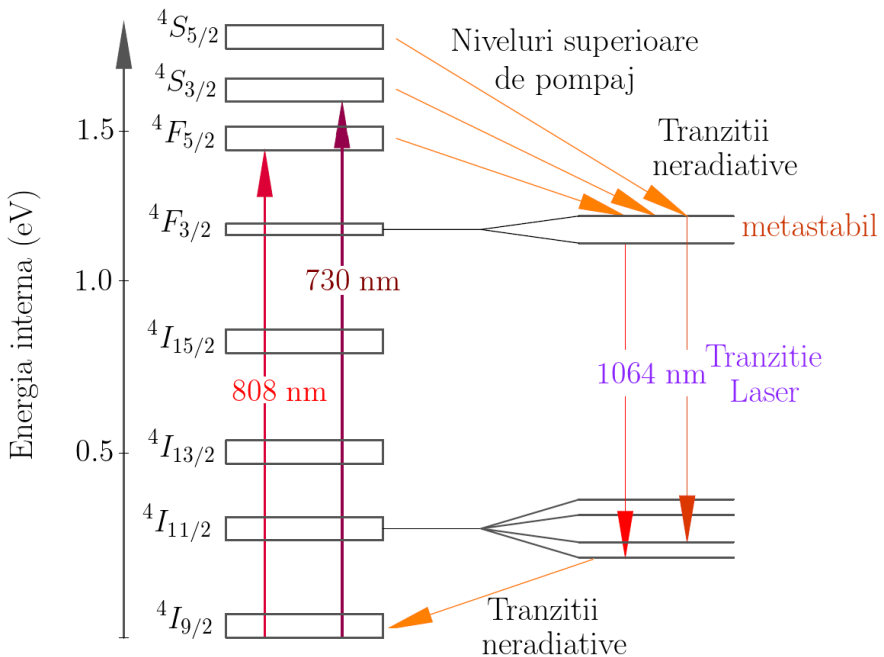


Figura 5.6: Diagrama energetică a ionilor de Nd^{3+} din cristalul Nd-YAG

Pompajul se realizează optic cu ajutorul unor surse cu spectru larg, ca de exemplu o lampă cu vapori de xenon la presiune înaltă. În ultimii ani, odată cu dezvoltarea sistemelor laser cu semiconductori, pentru eficientizarea energetică a laserului cu Nd-YAG, se utilizează diode laser centrate pe lungimile de undă 730 nm sau 808 nm, excitând astfel ionii de Nd^{3+} de pe nivelul fundamental, pe niveluri superioare cu timp de viață mic (Figura 5.6). De exemplu, nivelul ${}^4F_{5/2}$ permite absorbția luminii la 808 nm. De pe nivelul ${}^4F_{5/2}$ ionii cad pe nivelul ${}^4F_{3/2}$ prin tranziții neradiative. Ionii de neodim rămân suficient de mult timp pe nivelul ${}^4F_{3/2}$ deoarece durata de viață a acestui nivel este de aproximativ 230 μs [7], în timp ce celelalte niveluri excitate au un timp de viață mult mai mic decât o nanosecundă. Ionii se acumulează pe acest nivel metastabil și astfel se realizează inversia populației. De asemenea, trebuie menționat că ionii nu se acumulează pe nivelul inferior odată ce și-au pierdut energia sub formă de emisie stimulată: trecerea dintre nivelul ${}^4I_{11/2}$ și starea fundamentală este foarte rapidă.

Comparativ cu laserul cu rubin, datorită faptului că nivelul inferior laser este diferit de cel fundamental, realizarea inversiei populației este foarte eficientă la laserul cu Nd-YAG. Cristalele de rubin sau granat de ytriu-aluminiu pot fi sintetizate artificial sub formă cilindrică (Figura. 5.7) la dimensiuni mari. În prezent, laserul Nd-YAG este cel mai eficient energetic și oferă posibilitatea obținerii de energii laser foarte mari.

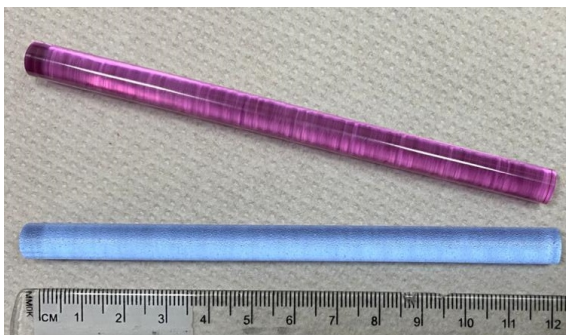


Figura 5.7: Medii active cristaline: rubin și granat de ytriu–aluminiu

Observația 5.5. Materialele cristaline lipsite de simetrie inversă pot prezenta o așa-numită χ^2 ne-liniaritate (materiale cristaline neliniare). Acest lucru poate da naștere fenomenului de dublare a frecvenței [16]. Unda optică ce intră în cristalul neliniar generează o altă undă cu o frecvență dublă, adică cu jumătate din lungimea de undă a celei inițiale. Acest proces se mai numește și *dublare în frecvență*. Dacă fasciculul de intrare este în domeniul infraroșu la 1064 nm (laser Nd-YAG), pe durata traversării cristalului neliniar se generează o undă verde la 532 nm. Acest fenomen stă la baza funcționării așa numitului sistem laser *Frequency Doubled Laser*. Acest laser oferă posibilitatea convertirii energiei laser din domeniul infraroșu în vizibil. Repetând acest proces, conversia merge până în domeniul ultraviolet, la 266 nm.

Exemplu 5.2. Proiecțiile laser de dimensiuni mari folosite la spectacolele sunt realizate cu ajutorul laserului în infraroșu Nd-YAG (1064 nm) secundat de un mecanism de dublare a frecvenței în verde (532 nm).

Exemplu 5.3. Celebrul experiment *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* – LIGO [17] de punere în evidență a undelor gravitaționale folosește o diodă la 808 nm cu puterea de 4 W pentru pomparea unui laser Nd-YAG la 1064 nm a cărui putere inițială este de 2 W. Ulterior radiația laser este trecută succesiv prin cristale de granat de ytriu–aluminu și amplificată liniar la 35 W. Această nouă putere este apoi introdusă într-un sistem oscilant și amplificat la 400 W. O astfel de amplificare nu este suficientă pentru a asigura un grad de coerență suficient de mare. În prezent, la sensibilitatea maximă interferometrului LIGO, puterea laser este de 1 MW.

5.4 Laserul cu CO₂

Laserul dioxid de carbon funcționează cu un amestec gazos în proporție de 75% He, 10% CO₂ și 15% N₂, amestec ce este adus în stare de plasmă prin intermediul unei descărcări electrice. Când o tensiune este aplicată din exterior, electronii slab accelerați ciocnesc moleculele de N₂ și CO₂ și le excită pe nivelurile lor de vibrație imediat apropiate de starea fundamentală. Digrama stărilor energetice ale celor două tipuri de molecule, prezentată în Figura 5.8 indică domeniul energiilor mici (sub 1 eV), domeniu specific nivelurilor molecular vibraționale. Molecula de dioxid de carbon este liniară în starea fundamentală și conține un atom de carbon și doi atomi de oxigen între care se stabilesc legături covalente duble. Dacă molecula este excitată vibrațional, aceste legături nu rămân rigide ci execută mișcări de oscilație sau îndoire (*bending*). Raportându-ne la centrul de masă al moleculei, mișcarea de oscilație axială poate fi simetrică sau asimetrică. De exemplu, dacă atomii de oxigen oscilează sincron față de atomul de carbon atunci oscilația este simetrică.

Stările energetice ale moleculei de dioxid de carbon sunt numerotate ținând cont de numărul cuantice de vibrație asociate acestor trei moduri de oscilație în ordinea: simetric, de îndoire și respectiv asimetric. De exemplu, starea (100) indică faptul că molecula de CO₂ execută o mișcare de oscilație simetrică ($v_{simetric} = 1$), fără a executa oscilații de îndoire sau asimetric, moduri pentru care numerele cuantice de vibrație sunt zero. Referitor la molecula de azot, fiind o moleculă biatomică, nu putem discuta de diferite moduri de oscilație sau îndoire și ca urmare ea poate oscila doar simetric. De exemplu, îndoirea moleculei de N₂ este echivalentă cu rotirea moleculei. Această simplă constatare conduce imediat la conștientizarea faptului că peste aceste mișcări oscilatorii de vibrație a legăturilor moleculare covalente se suprapun mișcările de rotație. Altfel spus, nivelurile energetice vibraționale, indicate în diagrama energetică (Figura 5.8), conțin sub-niveluri de rotație.

Aceste sub-niveluri sunt, de asemenea, cuantificate de numărul cuantic de rotație J . Regula de selecție pentru tranzițiile vibrațional-rotatională implică variația $\Delta J = \pm 1$. Acele tranziții în care numărul cuantic de rotație J crește cu 1 se numesc tranziții ale ramurilor P , iar cele în care J scade cu 1 sunt denumite tranziții ale ramurilor R .

Primul nivel vibrațional al moleculei de N_2 este metastabil, deoarece molecula este simetrică și nu poate efectua o tranziție radiativă înapoi pe nivelul fundamental. Într-o descărcare cu azot, aproximativ 20–30% din molecule sunt excitate vibrațional. Nivelul energetic cu $v = 1$ al moleculei de N_2 este la egalitate cu nivelul stării (001) al moleculei de CO_2 în limita a 2 meV. Atunci când cele două gaze sunt amestecate, transferul rezonant de energie internă prin intermediul ciocnirilor are loc între cele două stări, crescând astfel populația nivelului (001) al dioxidului de carbon. De asemenea, cel de-al doilea nivel $v = 2$ al moleculei de N_2 este la egalitate cu nivelul stării (002) al moleculei de CO_2 și așa mai departe. Rezultatul net este că stările asimetrice ($00v$) devin extrem de populate sau altfel spus, gazul are o

Cine va prelua
cei 2 meV
și sub ce formă
energetică ?

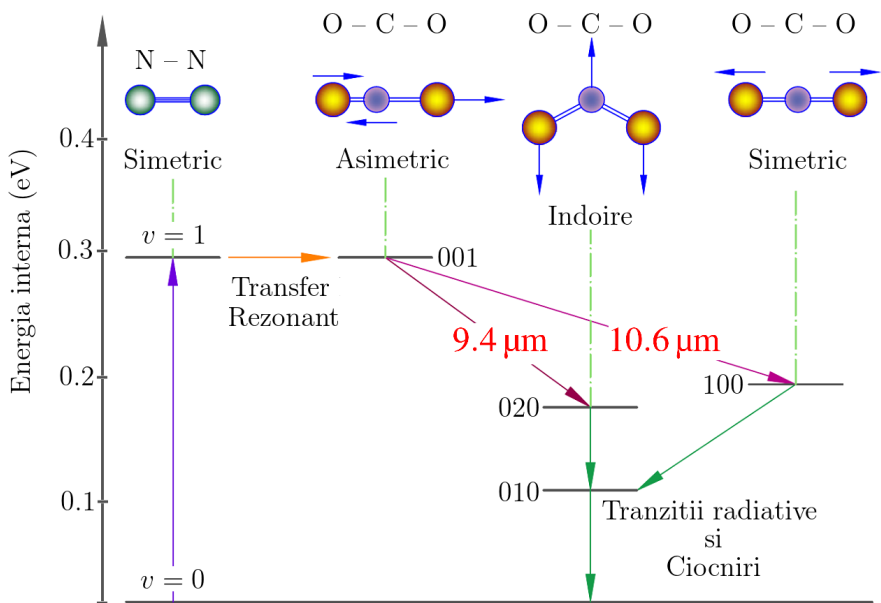


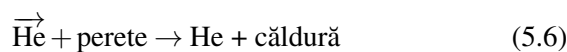
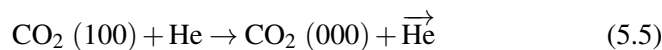
Figura 5.8: Diagrama energetică a moleculelor de N_2 și CO_2

temperatură vibrațională ridicată. Experimentele arată că inversia populației nu este doar rezultatul excitării electronice directe a moleculelor de CO₂, ci mai curând cauzată de schimbul de energie vibrațională între N₂ și CO₂ prin intermediul ciocnirilor.

Observația 5.6. Rolul azotului în laserul cu CO₂ este identic cu cel al heliului din laserul cu He–Ne: realizarea inversiei populației pe baza ciocnirilor cu transfer rezonant de energie internă.

Tranzițiile laser cele mai probabile sunt de la modul vibrațional asimetric (001) la modul vibrațional simetric (100) cu lungimea de undă 10.6 μm și tranzițiile de la modul vibrațional asimetric (001) la modul de îndoire (020) cu lungimea de undă 9.4 μm (Figura. 5.8).

Adăugarea heliului într-o proporția ridicată a amestecului de gaz ajută la creșterea puterii laserului cu CO₂. Puterea laser depinde direct proporțional de valoarea inversiei populației și este cu atât mai mare cu cât nivelul superior laser este mai populat iar nivelurile inferioare laser sunt mai goale. Pentru a crește inversia, nivelurile de îndoire (020) și (010) cât și nivelul simetric (100) trebuie golite suplimentar, nu doar prin tranziții radiative. De exemplu, golirea suplimentară prin ciocniri a nivelului (100) decurge conform ecuațiilor:



Cum eliminăm
căldura

din sistem?

Prima ecuație descrie posibilitatea conversiei energiei interne cuantificate în energie cinetică necuantificabilă. Gradul de realizabilitate al acestui proces depinde foarte mult de masa partenerului de ciocnire, care este în acest caz heliul. Timpii de viață a celor mai importante niveluri în laserul CO₂ sunt practic determinate de fenomene colizionale și variază de la câteva milisecunde la câteva secunde. Durata medie dintre două ciocniri moleculare este de 10 până la 100 nanosecunde, funcție de presiunea amestecului de gaz,

cu valori optime în domeniul 50–100 mbar.

Observația 5.7. Datorită masei sale mici, heliul reușește să depopuleze eficient nivelurile inferioare laser prin intermediul conversiei energiei interne a moleculelor de CO_2 în energie cinetică a heliului.

Exercițiul 5.3. Hidrogenul are masa cea mai mică și această conversie energetică este mai probabilă. De ce nu este indicată folosirea hidrogenului în amestecul gazos în proporție de 75% He, 10% CO_2 și 15% N_2 , în locul heliului?

În prezent, laserul cu CO_2 este foarte fiabil și poate dezvolta puteri într-o plajă largă de valori, de la 10 W până la 300 W. Desigur, cele de putere mare sunt utilizate în industrie în procese tehnologice de sudare sau tăiere. Cele de putere medie sunt utilizate în domeniul chirurgical. Emisia laserului cu CO_2 este în domeniul infraroșu îndepărtat (domeniu termic), acolo unde apa în stare lichidă prezintă un grad ridicat de absorbție. Ca urmare orice țesut viu va absorbi eficient acest domeniu termic, prin intermediul apei, practic va fi instantaneu vaporizat. În același timp, din punct de vedere medical, cauterizarea și sterilizarea zonei tăiate sunt procese cruciale ce au loc imediat adiacent zonei de tăiere propriu-zisă.

Exemplu 5.4. Emisia laserului cu CO_2 este în domeniul infraroșu îndepărtat ($10.6 \mu\text{m}$), sau domeniul termic, acolo unde apa în stare lichidă prezintă un grad ridicat de absorbție. Ca urmare orice țesut viu va absorbi eficient acest domeniu termic, prin intermediul apei, practic va fi instantaneu vaporizat. În același timp, din punct de vedere medical, cauterizarea și sterilizarea zonei tăiate sunt procese cruciale ce au loc imediat adiacent zonei de tăiere propriu-zisă.

5.5 Laserul cu excimeri

Cuvântul *excimer* este un acronim și este folosit pentru a descrie un dimer excitat (*excited dimer*). Termenul de excimer se poate atribui corect doar dimerilor homo-nucleari. Termenul corect pentru molecule hetero-nucleare este cel de *exciplex* (*excited molecular complex*) însă acronimul excimer se folosește în mod curent și pentru clasa moleculelor tip exciplex. Un excimer este o moleculă legată relativ stabil doar dacă se află în stare excitată și este instabil în starea fundamentală. De exemplu, moleculele biatomice constituite din atomi cu pături complete precum gazele rare, formează dimeri excitați stabili de tipul He_2^* sau Ar_2^* . În starea fundamentală energia de legătură se datorează forțelor Van der Waals. Dacă această energie este mai mică decât energia termică kT la temperatura camerei, excimerul devine instabil și gazele nobile revin la starea monoatomică. Se pot forma și excimeri din atomi diferiți, de exemplu KrF^* sau XeCl^* , din combinația atomilor gazelor nobile cu elemente puternic electronegative. Pentru excimerul XeCl^* ales drept exemplu, din diagrama nivelurilor energetice funcției de distanța

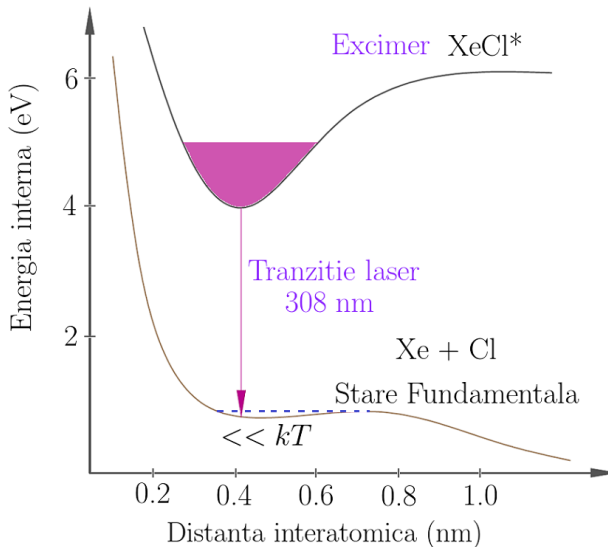


Figura 5.9: Diagrama energetică a excimerului XeCl^*

interatomică (Figura 5.9), se poate observa diferența energetică mare, de ordinul a 3 eV, dintre starea excitată și cea fundamentală. Tranziția între cele două stări este însoțită de emisia unui foton de energie relativ mare, în domeniul ultraviolet cu lungimea de undă $\lambda = 308$ nm. Tranziția laser de pe nivelul electronic superior (XeCl^*) pe cel fundamental este însoțită de disocierea rapidă (10^{-13} s) a excimerului în componentele atomice de bază $\text{Xe} + \text{Cl}$. Din acest motiv nivelul fundamental rămâne nepopulat, iar valoarea inversiei de populație devine egală cu populația nivelului superior, ceea ce asigură o eficiență deosebită a procesului de generare laser.

Exemplu 5.5. Tabelul următor sintetizează diverși excimeri utilizați în sistemele laser [18] alături de lungimile de undă asociate tranzițiilor de disociere cu emisie în domeniul ultraviolet.

Excimeri și lungimi de undă asociate disocierii	
XeCl^*	308 nm
XeF^*	350 nm
ArF^*	193 nm
KrF^*	249 nm
KCl^*	222 nm
F_2^*	157 nm

O problemă suplimentară în utilizarea laserului cu excimeri o constituie transportul gazelor de lucru. Pentru gazele inerte (Xe , Ar etc.) se folosesc butelii metalice obișnuite, însă la îmbutelierea gazelor halogen trebuie ținut cont de corosivitatea ridicată a acestora asupra suprafețelor metalice. De exemplu clorul (Cl) este îmbuteliat în recipiente metalice într-un amestec $5\% \text{HCl} + 95\% \text{He}$ sau $5\% \text{HCl} + 94\% \text{He} + 1\% \text{H}_2$. Deoarece acidul clorhidric (HCl) disociază, în volumul incintei este prezent atât ionul negativ de clor Cl^- cât și clorul molecular Cl_2 . La funcționarea sistemelor laser cu excimeri, în

amestecul gaz halogen – gaz inert se adaugă suplimentar un gaz de umplere, *buffer*, care facilitează reacțiile de recombinație în care este implicat un al treilea partener de ciocnire. Din multitudinea de procese elementare prezente în plasma amestecului de gaz, în continuare sunt selectate principalele procese de ciocnire care au loc în volumul mediului activ pentru excimerul XeCl, cu gaz de umplere neon.

Procese elementare în laserul cu excimeri XeCl	
$e^- + Xe \rightarrow Xe^* + e^-$	excitare prin impact electronic
$e^- + Xe \rightarrow Xe^+ + 2e^-$	ionizare prin impact electronic
$Cl + e^- \rightarrow Cl^-$	afinitatea electronică a clorului diminuează densitatea electronică
$Xe^+ + Cl^- + Ne \rightarrow XeCl^* + Ne$	combinație realizată prin intermediul celui de-al treilea partener
$Xe^* + Cl_2 \rightarrow XeCl^* + Cl$	combinație cu formare de clor atomic
$XeCl^* \xrightarrow{10^{-13} s} Xe + Cl + h\nu$	tranziție laser însoțită de disociere
$Cl + Cl + Ne \rightarrow Cl_2 + Ne$	recombinație realizată prin intermediul celui de-al treilea partener

Teoretic, ultimele două ecuații prezentate în tabelul de mai sus sugerează o schemă de regenerare a clorului și din acest motiv amestecul de gaz ar trebui să se mențină un timp foarte îndelungat. În practică, laserul trebuie reumplut periodic (interval de la o săptămână până la o lună) deoarece reactivitatea ridicată a clorului degradează elementele constructive ale cavității laserului. În situații limită, se impune o curățare a componentelor optice folosite. Analizând ecuațiile proceselor elementare descrise mai sus, se observă că reacțiile în care este implicat cel de-al treilea partener (Ne) au o importanță deosebită iar eficientizarea procesului implică o presiune de lucru ridicată (≈ 3 atmosfere) a amestecului de gaz.

Exemplu 5.6. Tabelul următor exemplifică presiunile de operare a două dintre cele mai utilizate sisteme laser cu excimeri [18]

Presiuni parțiale				
Laser excimeri	Halogen	Gaz inert	Gaz de umplere	Presiune totală
XeCl 308 nm	He/HCl/H ₂ 90 mbar	Xe 110 mbar	Ne 3100 mbar	3300 mbar
ArF 193 nm	He/F ₂ 140 mbar	Ar 250 mbar	Ne 1400 mbar He 600 mbar	2390 mbar

Deoarece formarea excimerilor se poate realiza numai prin ciocniri, sunt necesare densități mari de particule. Acest deziderat implică realizarea unei descărcări uniforme de plasma de-a lungul întregii zone active în canal la presiuni înalte ale amestecului de gaz. La pompajul laserului cu excimeri se utilizează descărcări electrice în regim pulsant la tensiuni ridicate (22–25 kV) iar durata pulsului este de ordinul a zeci de nanosecunde (10–50 ns). La aceasta scală temporală, radiația laser parcurge cavitatea optică practic doar de 1-2 ori. Acest fapt are drept consecință o probabilitate scăzută de realizare a unui singur mod de oscilație laser (unde staționare în rezonator). Ținând cont de regimul pulsant de funcționare a laserului, nu toate pulsurile laser sunt identice cel puțin din punct de vedere al energiei radiației laser. De aici rezultă o coerență spațială și temporală scăzută a radiației laser cu o semi-lărgime spectrală de ordinul a 1 nm. În același timp, fasciculul laser obținut este ușor divergent (1–3 mrad) și are un diametru relativ mare (2–4 cm). Toate aceste caracteristici pot fi enumerate drept dezavantaje ale utilizării unui laser cu excimeri.

Avantajul major se referă la energia mare a unui singur puls laser în domeniul ultraviolet (25–150 mJ) per puls. Frecvența de repetiție a pulsurilor poate fi controlată în domeniul 1–25 Hz. Tot ca avantaje trebuie

menționate: “ușurința” de a atinge inversia populației datorată faptului că nivelul laser inferior este totdeauna depopulat precum și proprietate de “regenerare” a mediului activ ceea ce implică un consum relativ redus a gazelor de lucru.

Exemplu 5.7. Radiația laserului cu CO_2 este “caldă” deoarece se situează în domeniul infraroșu îndepărtat. În mod contrar, radiația laserului cu excimeri este “rece” deoarece se situează în domeniul ultraviolet. Aportul termic al radiației ultraviolet la suprafața țintă este neglijabil deși energia transportată este mare. În această situație, la suprafața țintei are loc fenomenul de ablație în care o mică parte din materialul țintei este pulverizat, fără a fi încălzit.

În domeniul chirurgiei oftalmologice, intervențiile laser la nivelul corneei trebuie să excludă posibilitatea transferului termic către globul ocular. Acest deziderat exclude posibilitatea folosirii laserului cu CO_2 . În prezent, radiația “rece” a laserului cu excimeri ArF (193 nm) este utilizată cu succes în sistemul LASIK [19] la modificarea curburii corneei prin ablație laser realizându-se astfel tratarea miopiei sau astigmatismului.

Bibliografie

Surse On-Line

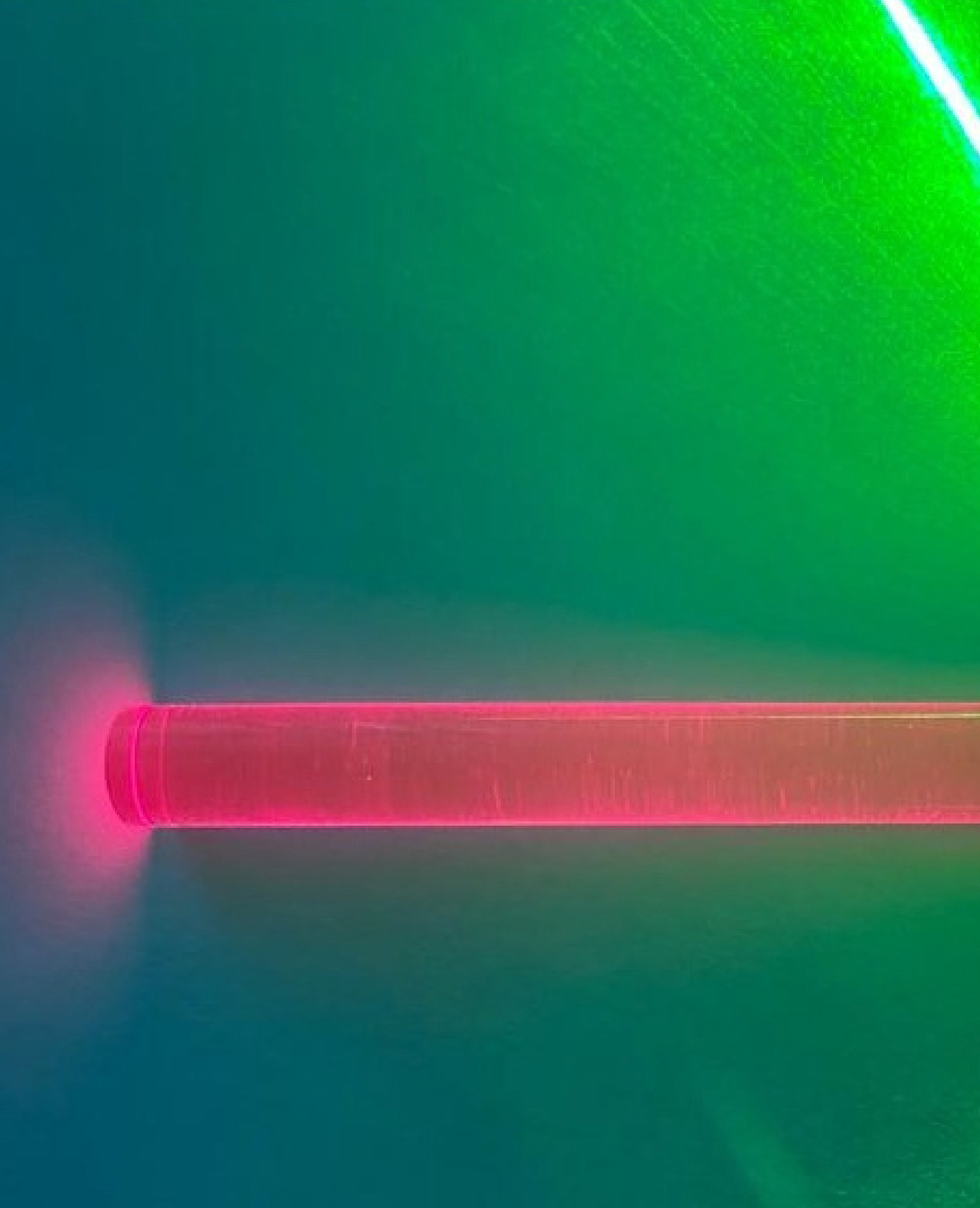
- [1] www.wikipedia.org. *Redshift*. en. Page Version ID: 868996374. Nov. 2018. (Visited on 11/21/2018) (cited on page 29).
- [2] www.wikipedia.org. *List of the most distant astronomical objects*. en. Page Version ID: 893633679. Apr. 2019. (Visited on 04/23/2019) (cited on page 32).
- [3] www.jpl.nasa.gov. *NASA - Observatories Find Most Distant Galaxy Candidate*. (Visited on 11/21/2018) (cited on page 33).
- [4] www.spacetelescope.org. *Hubble breaks cosmic distance record*. en. (Visited on 04/23/2019) (cited on page 33).
- [7] www.optique-ingenieur.org. *Optique pour l'ingénieur*. fr. (Visited on 10/15/2019) (cited on pages 60, 115).
- [9] www.eclipse.gsfc.nasa.gov. *NASA - Accuracy of Eclipse Predictions*. (Visited on 10/23/2019) (cited on page 66).
- [17] www.ligo.caltech.edu. *LIGO's Laser*. (Visited on 02/05/2020) (cited on page 116).

Articole

- [5] P. A. Oesch et al. “A remarkably luminous galaxy at $z=11.1$ measured with Hubble Space Telescope Grism Spectroscopy”. In: *The Astrophysical Journal* vol. 819 (2016), page 129. DOI: 10.3847/0004-637X/819/2/129 (cited on page 33).
- [6] Robert C. Hilborn. “Einstein coefficients, cross sections, f values, dipole moments, and all that”. In: *American Journal of Physics* vol. 50 (1982), page 982. DOI: 10.1119/1.12937 (cited on pages 38, 39).
- [10] Sidney A. Self. “Focusing of spherical Gaussian beams”. In: *Applied Optics* vol. 22 (1983), page 658. DOI: 10.1364/AO.22.000658 (cited on page 69).
- [11] Edwin En-Te Hwu and Anja Boisen. “Hacking CD/DVD/Blu-ray for Biosensing”. In: *ACS Sensors* vol. 3 (2018), page 1222. DOI: 10.1021/acssensors.8b00340 (cited on page 70).
- [15] C.J. Hawthorn, K.P. Weber, and R.E. Scholten. “Littrow configuration tunable external cavity diode laser with fixed direction output beam”. In: *Review of scientific instruments* vol. 72 (2001), page 4477. DOI: 10.1063/1.1419217 (cited on pages 101, 103).
- [16] R. Paschotta et al. “82% Efficient continuous-wave frequency doubling of $1.06 \mu\text{m}$ with a monolithic $\text{MgO}:\text{LiNbO}_3$ resonator”. In: *Optics Letters* vol. 19 (1994), page 1325. DOI: 10.1364/OL.19.001325 (cited on page 116).
- [19] Kerry D Solomon et al. “LASIK world literature review: quality of life and patient satisfaction”. In: *Ophthalmology* vol. 116 (2009), page 691. DOI: 10.1016/j.opthta.2008.12.037 (cited on page 125).

Cărți

- [8] Paul F. Goldsmith. *Quasioptical Systems: Gaussian Beam Quasioptical Propagation and Applications*. IEEE Press, 1998 (cited on page 62).
- [12] Frank L. Pedrotti, Leno M. Pedrotti, and Leno S. Pedrotti. *Introduction to Optics*. 3rd edition. Cambridge University Press, 2017. DOI: 10.1017/9781108552493 (cited on page 92).
- [13] Christopher A Palmer and Erwin G Loewen. *Diffraction grating handbook*. Volume 5. Thermo RGL New York, 2002 (cited on page 97).
- [14] Erwin G Loewen and Evgeny Popov. *Diffraction gratings and applications*. CRC Press, 2018 (cited on page 97).
- [18] Mark Csele. *Fundamentals of light sources and lasers*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2004 (cited on pages 122, 124).
- [20] Valer Pop. *Bazele opticii*. Editura Universității “Alexandru Ioan Cuza” din Iași, 1988.
- [21] Gh. Singurel. *Fizica Laserilor - Partea I*. Editura Universității “Alexandru Ioan Cuza” din Iași, 1995.
- [22] Mihai Delibaș. *Elemente de optică și spectroscopie*. Editura Universității “Alexandru Ioan Cuza” din Iași, 1997.
- [23] John David Jackson. *Classical Electrodynamics, 3rd Edition*. Wiley-VCH, 1998. ISBN: 978-0-471-30932-1.
- [24] Mitachi Strat, Georgeta Strat. *Spectroscopie și Laseri*. Editura Universității “Alexandru Ioan Cuza” din Iași, 2001.
- [25] Saroj Rout and Sameer Sonkusale. *Active Metamaterials*. Cham: Springer International Publishing, 2017, pages 27–39. DOI: 10.1007/978-3-319-52219-7_2. (Visited on 11/21/2018).



Number of pages: 138
ISBN 978-606-028-337-9